Mémento développements

1) Développer, c'est remplacer un produit de facteurs par une somme de termes. Et cela se traduit **toujours** par une disparition des parenthèses.

Développer, c'est donc contourner la priorité des opérations et la règle qui dit que toute opération entre parenthèses est prioritaire sur les autres.

Développer, c'est utiliser la propriété de "*Distributivité de la multiplication sur l'addition*" :

$$\mathbf{3} \times (5 + 4 - 2) = \mathbf{3} \times 5 + \mathbf{3} \times 4 - \mathbf{3} \times 2$$

Chaque flèche indique une multiplication (ici) par 3. Vous pouvez vérifier que les 2 calculs de part et d'autre du signe = donnent des résultats parfaitement identiques.

Il y a quelques écueils à éviter cependant.

Gardons-nous de confondre $x \times x$ avec $x + x$! ....$x \times x = x^2$ et $x + x = 2x$

Ou encore $2x + 3x$ avec $2x \times 3x$! ....$2x \times 3x = 6x^2$ et $2x + 3x = 5x$.

$2x + 3x = x + x + x + x + x$ ce qui fait bien 5 fois le nombre x.

Autre erreur très répandue : ajouter x^2 et x^3 pour trouver x^5. La faute vient là d'une méconnaissance des calculs de puissances... En effet, selon la définition x^5, c'est : $x \times x \times x \times x \times x$ (5 nombres égaux à x dans la multiplication), ce qui, il est facile d'en convenir est différent de $x^2 + x^3$ qui est lui : $x \times x + x \times x \times x$.

Pour illustrer ce propos, voici quelques exemples :

$x(x + 2) = x^2 + 2x$.... $xy(x + y) = x^2y + xy^2$.... $3xy(2x + 5y) = 6x^2y + 10xy^2$....

$2x(3x - 4) - x(x - 2) = 6x^2 - 8x - x^2 + 2x = 5x^2 - 6x$....

Pour ce dernier exemple, il y avait 2 séries de 2 produits. La 2e série comportait une difficulté supplémentaire : il fallait multiplier par -3 et donc penser à appliquer la règle des signes de la x.

Cas du produit de 2 sommes (algébriques !) :

$$(5x + 2)(2x + 3) = 10x^2 + 15x + 4x + 6 = 10x^2 + 19x + 6$$

*On doit multiplier **chaque** terme de l'une des sommes, par **chaque** terme de l'autre somme.*

2) Développer, c'est aussi faire usage, lorsque c'est possible, d'égalités appelés *Produits ou Identités Remarquables* qui présentent des développements (suivis de réductions) déjà effectués permettant de gagner du temps.

Jusqu'en 3e, elles sont au nombre de 3 :

→ Carré d'une somme : $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \mathbf{a^2+2ab+b^2}$

Il faut "simplement" repérer qui est a et qui est b...

Exemples

- ❒ $(x+3)^2$. Là, c'est simple : a c'est x et b c'est 3. Donc $\mathbf{(x+3)^2} = x^2+2 \times x \times 3+3^2 = \mathbf{x^2+6x+9}$
  Calcul mental : $54^2=(50+4)^2=50^2+2 \times 50 \times 4+4^2 = 2500+400+16 = 2916$.
- ❒ $(3x+5)^2$. Déjà plus "complexe" : ici a = $3x$ et b =5. $\mathbf{(3x+5)^2} = (3x)^2+2 \times 3x \times 5+5^2 = \mathbf{9x^2+30x+25}$
  Une faute très répandue à éviter : a =$3x$, donc non a^2 ce n'est pas $3x^2$ puisque :
  $(3x)^2 = (3 \times x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$. Il a été vu, en effet, en 4e que $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- ❒ $(3x+2y+5)^2=[(3x+2y)+5]^2$. Plus surprenant. Le travail se fait par une double application du produit remarquable : on note a = $(3x+2y)$ et b = 5.
  On obtient : $[(3x+2y)+5]^2 = (3x+2y)^2+2 \times (3x+2y) \times 5+5^2 = (3x+2y)^2+10(3x+2y)+25$
  On réutilise la formule de produit remarquable avec $(3x+2y)^2$, sans oublier de distribuer le 10 :
  $[(3x+2y)+5]^2 = 9x^2+12xy+4y^2+ 30x + 20y + 25$

→ Carré d'une différence : $\mathbf{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = \mathbf{a^2-2ab+b^2}$

Il faut "simplement" aussi repérer qui est a et qui est b... et se souvenir que le seul changement du produit n°2 $(a-b)^2$ par rapport au produit n°1 $(a+b)^2$ c'est le changement de signe, c'est tout.

Avec les exemples donnés au-dessus :

- ❒ $\mathbf{(x-3)^2} = x^2-2 \times x \times 3+3^2 = \mathbf{x^2-6x+9.}$
- ❒ $\mathbf{(3x-5)^2} = (3x)^2-2 \times 3x \times 5+5^2 = \mathbf{9x^2-30x+25}$

- ❒ $\mathbf{(3x\text{-}2y\text{-}5)^2}$= $[(3x\text{-}2y)\ \text{-}5)]^2 = (3x)^2 \text{-}2 \times (3x\text{-}2y) \times 5+25$ = $\mathbf{9x^2\text{-}12xy+4y^2\text{-}\ 30x+20y+25}$
  Attention aux signes quand on distribue !
  On peut mélanger les deux (un + et un -) ?
  Bien sûr !
  On peut aussi écrire : $(3x\text{-}2y\text{-}5)^2=[3x\text{-}(2y+5)]^2$
  $(3x\text{-}2y\text{-}5)^2=[3x\text{-}(2y+5)]^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times (2y+5)+(2y+5)^2 = 9x^2\text{-}6x(2y+5)\ +(4y^2\ +20y+25)$
  D'où $3x\text{-}2y\text{-}5)^2=[3x\text{-}(2y+5)]^2 = 9x^2\text{-}12xy\ \text{-}30x\ +4y^2\ +20y+25$
  L'ordre n'est plus tout à fait le même, mais les termes (signes compris) sont bien les mêmes

→ Produit d'une somme par une différence : $\mathbf{(a+b)(a\text{-}b)}$ = $a^2\text{-}ab+ba\text{-}b^2$ = $\mathbf{a^2\text{-}b^2}$

- ❒ $(x+3)(x\text{-}3)$. Là, c'est simple : a c'est x et b c'est 3. Donc : $\mathbf{(x+3)(x\text{-}3) = x^2\text{-}3^2 = x^2\text{-}9}$
  Calcul mental : $54 \times 46 = (50+4)(50\text{-}4) = 50^2\text{-}\ 4^2 = 2500\text{-}16 = 2484$.
- ❒ $(3x+5)(3x+5)$. À peine plus "complexe" : ici a = $3x$ et b = 5.
  Donc : $\mathbf{(3x+5)(3x+5) = (3x)^2\text{-}5^2 = 9x^2\text{-}25}$
- ❒ $(3x+2y+5)(3x+2y\text{-}5) = [(3x+2y)+5][(3x+2y)\text{-}5)]$. Ici a = $(3x+2y)$ et b = 5
  Donc $\mathbf{[(3x+2y)+5][(3x+2y)\text{-}5)] = (3x+2y)^2 – 5^2 = 9x^2+12xy+4y^2–25}$
  Autre exemple : $(3x+2y\text{-}5)(3x\text{-}2y+5) = [3x+(2y\text{-}5)][3x\text{-}(2y\text{-}5)]$ où a= $3x$ et b = $(2y\text{-}5)$
  $(3x+2y\text{-}5)(3x\text{-}2y+5) = [3x+(2y\text{-}5)][3x\text{-}(2y\text{-}5)] = (3x)^2 – (2y\text{-}5)^2 = 9x^2 – (4y^2\ \text{-}\ 20y+25)$
  Donc : $\mathbf{(3x+2y\text{-}5)(3x\text{-}2y+5) = 9x^2 – 4y^2+20y\text{-}25}$