B Mathématiques 2 MP/MPI

Q1 - Certains candidats ont déjà éprouvé des difficultés dans la résolution de cette question, abordée par tous, qui méritait un peu d'organisation. La convergence normale sur [- 1,1] de la série entière se montrait aisément, sa divergence grossière en dehors de ce segment également, grâce aux résultats classiques sur les suites. On peut donc répondre donc très vite à cette question, ce que certain ont fait. Le critère de d'Alembert peut aussi être exploité, moins efficacement. Figure même au programme un résultat très adapté à la situation (rayon de convergence de la série entière). Enfin, remarquons que l'emploi du « critère spécial des séries alternées » n'était pas judicieux ici, et que la connaissance du rayon de convergence ne permet pas d'en déduire le domaine de convergence.
Q2 - Pour rédiger la réponse de cette question, le mieux comme l'invite l'énoncé, est de se contenter de vérifier que le couple satisfait la condition voulue. La confusion entre analyse et synthèse est fréquente. Il était bien sûr possible de raisonner par équivalences logiques ce qui n'est presque jamais fait correctement. A noter qu'on constate déjà des erreurs dans les deux intégrations par parties successives à effectuer, ou même sur la valeur de $\cos(n.\pi)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$! Il y a moyen de résoudre le second item de cette question par différents méthodes (dont l'une, très efficace, exploitant un « télescopage » judicieux basé sur une simple relation trigonométrique). La majorité des candidats utilisant la somme partielle d'une série géométrique complexe oublient de mentionner que sa raison n'est pas 1. Certains étudiants invoquent même le fait que < 1 !
Q3 - Cette question a été largement abordée. En devinant la démarche à suivre, le candidat se contente parfois de conclure cette question sans justifications. Pour constater qu'un prolongement par continuité est de classe C_1, il y nécessairement un travail substantiel à fournir. On ne peut pas se contenter de prolonger la dérivée de la fonction pour décréter qu'elle est de classe C_1 !
Q4 - Pour déterminer le domaine de définition de f (notion qui semble même poser problème), la continuité de l'intégrande sur l'intervalle ouvert est à mentionner brièvement. De même, sa positivité est utile pour ceux qui utilisent la notion d'équivalent. Relevons une nouvelle fois que l'intégrabilité de l'intégrande n'est pas équivalente à la convergence de son intégrale, a priori. Les phrases sibyllines « on étudie en $\pi/2$ et en 0 » ne sont pas acceptables. Remarquons enfin que la fonction $\sin(x)$ n'est pas définie a priori sur $[0, \pi/2]$, si $x \in \mathbb{R}$. Une grande partie des étudiants pressent la nécessité d'une intégration par partie. Mais une intégration par partie portant sur des intégrales impropres exige certaines précautions, très largement négligées ici. On ne peut se satisfaire d'un énigmatique "après calculs faits au brouillon" !
Q5 - Cette question était la première question délicate et exigeait un minimum de rigueur. Pour les besoins de sa résolution, la fonction de deux variables Φ introduite est souvent confondue avec ses fonctions partielles et même avec $\Phi(x, t)$. Le raisonnement est donc abscons et manque singulièrement de rigueur. Quelques étudiants parviennent même à confondre les deux variables ! Les hypothèses de positivité, parfois nécessaires, sont éludées et des inégalités fausses sont assénées. La formule « par croissance comparée » est souvent bien trop laconique. On ne peut s'en contenter lorsqu'elle déborde du cadre restrictif du programme. Le critère de Bertrand (hors programme) est invoqué de manière plus ou moins explicite. On observe également des confusions entre majoration et domination. La décroissance de f se déduisait aisément de l'expression de f' obtenue : quelques candidats ne l'ont pas vu. La notion de décroissance d'une fonction numérique est même parfois confondue avec celle d'une suite réelle !

Q6 - La stricte positivité de f n'est malheureusement pas mentionnée. Elle est pourtant souvent indispensable pour la rigueur du raisonnement. Trop de candidat confondent n et x de façon abusive. En général, $\Phi(n)$ n'est pas équivalent à $\Phi(n+1)$ lorsque n tend vers $+\infty$!
Q7 - Le fait que f tende vers $+\infty$ en -1 et 0 en $+\infty$ n'est jamais évoqué mais utilisé correctement. C'est pourtant ce qui justifie la présence des asymptotes verticale et horizontale à sa courbe représentative.
Q8 - De nombreux candidats utilisent la notation $\binom{n}{\alpha}$ (α non entier) pourtant non stipulée dans le programme officiel.
Q9 - Bien évidemment, l'énoncé attendait une réponse dépourvue de la notion intégrale. La technique classique pour calculer $f'(0)$ était suggérée par l'énoncé et un nombre non négligeable de candidats parviennent à la conclusion. En revanche, le calcul de $f'(1)$, pourtant accessible par une simple intégration par partie, est largement délaissé.
Q10 - Cette question délicate n'a pas été fréquemment résolue en totalité. Si le changement de variable intégral est mentionné plus ou moins clairement, le second volet de la question n'est quasiment pas traité. Certains candidats mentionnent cependant la fonction gamma d'Euler (hors programme), sans pouvoir conclure.
Q11 - Cette dernière question de la partie 3 fut souvent délaissée ou malmenée. Sa résolution se traitait pourtant assez facile en utilisant, par exemple, un théorème « d'intégration terme à terme ». Signalons toutefois le fait que sa série de Taylor ait un rayon de convergence strictement positif n'implique pas a priori que f est développable en série entière. En outre, les quelques tentatives observées dans les copies basées sur la formule de Taylor avec reste intégral ne débouchent pas ou sont abusives.
Q12 - Le fait que < 1, bien que primordial, est rarement signalé (jamais démontré, il est même très fréquemment confondu avec > 1 !). Il s'agissait pourtant d'un argument important pour mener le calcul (analogue à celui de la question 2) et justifier une convergence simple. De nombreux candidats, bien que réalisant sans doute la démarche attendue, se perdent ici dans les calculs.
Q13 - Le théorème (fondamental de l'analyse) utilisé est peu évoqué et ses hypothèses sont souvent négligées. La conclusion est hâtivement présentée (« avec c une constante réelle »), même si des erreurs de calcul préalables paraissent rédhibitoires.
Q14 - Cette question est peu traitée de façon significative. Sa conclusion est pourtant évoquée sans réelles justifications détaillées.
Q15 - En guise de conclusion de la partie 4, cette question assez technique utilisait la question antérieure et la première partie. Elle n'a été abordée que de façon marginale.
Q16 - Le fait que f soit strictement positive est éludé ou mentionné sans démonstration, malgré son importance. Il est à remarquer que, dans le programme officiel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne figure que le cas des intégrales « non généralisées ». A priori, un raisonnement par « passage à la limite » était donc indispensable (sauf aux quelques candidats qui ont adapté la démonstration classique à ce contexte plus général). Mentionnons néanmoins l'argument fallacieux rencontré ici : « intégrable car produit de deux fonctions intégrables ».
Q17 - Un nombre non négligeable de candidats a pu rédiger plus ou moins sérieusement un raisonnement par récurrence, pourtant facile à élaborer.
Q18 - Les justifications concernant les inégalités liées à la convexité sont souvent obscures. Les correcteurs ne peuvent se contenter ici d'une simple phrase comme « par convexité » ou « d'après l'inégalité des trois pentes » ; les intervalles d'application devaient être correctement mentionnés ; une figure explicative bien faite était également appréciée. Il en est de même pour ce qui concerne

raisonnement final de convergence.
Q19 - Question très peu abordée dont l'argumentaire est largement insuffisant (quid des réels compris entre -1 et 0, par exemple ?).
Q20 - Question très peu abordée, là aussi. Le raisonnement par analyse/synthèse est « survolé ».
Q21 - Cette dernière question, pourtant facile, n'est abordée que par un nombre très restreint de candidats.

🡅RETOUR