

## 1.3 Mathématiques 2 - filière MP

### 1.3.1 Généralités et présentation du sujet

L'opinion générale des correcteurs à l'issue de cette session est une altération sensible de la qualité des copies, tant du point de vue de la présentation et de la rédaction que pour ce qui concerne le contenu mathématique. Concernant le contenu mathématique, cette épreuve a révélé des lacunes importantes en algèbre linéaire chez de nombreux candidats, notamment sur les notions de réduction et théorie spectrale comme l'a illustré entre autres la première partie de la question 18. Certaines connaissances de base ne sont pas du tout maîtrisées, et l'on a vu trop souvent  $\alpha < 0$  et  $\beta < 0$  comme condition nécessaire et suffisante à la question 18 alors qu'il s'agit de nombres complexes. Quelques questions calculatoires comme 2-8-18 ont mis en lumière les travers de certains candidats qui empilent les lignes de calculs sans un seul mot d'explication parfois de façon quasiment illisible et sans mettre en évidence les arguments employés. En outre, des petites erreurs dans les changements d'indice ou encore dans les calculs de sommes semblent indiquer beaucoup de précipitation chez certains candidats et tout du moins un sérieux manque de relecture. Les questions 1, 4 et 10, entre autres, nécessitaient pour être correctement traitées de prendre en compte un passage à la limite dans la rédaction par exemple en utilisant la continuité de la norme, la continuité du produit matriciel ou encore la continuité de l'application transposée. Ces limites sont la plupart du temps passées sous silence dans les justifications et de nombreux points sont perdus par les candidats qui se contentent simplement de calculs formels et non rigoureusement justifiés. On a ainsi vu des candidats utiliser la commutativité de deux matrices lorsque ce n'était pas supposé et réciproquement, redémontrer des résultats explicitement admis ( $O_n(\mathbb{R})$  et  $SL_n(\mathbb{R})$  fermés par exemple), établir à la question 5 la décomposition de Dunford alors que c'est fait bien plus tard dans le problème, mais aussi ne pas remarquer des hypothèses importantes comme le fait que la norme dans la partie 1 vérifie  $\|I_n\| = 1$  ce qui est utile à la question 4. Le jury déplore également que certains candidats ne semblent pas lire les rapports des épreuves, par exemple le fait que le groupe orthogonal n'est pas égal à l'ensemble des matrices de déterminant 1, erreur qui a déjà été soulevée l'an passé dans le rapport précédent.

### 1.3.2 Analyse détaillée par question

**Q1** - Il s'agit ici de prouver que si  $A$  et  $B$  commutent alors  $A$  et  $\exp(B)$  commutent. Si cette question ne présentait pas de difficultés particulières à première vue, elle a été pourtant mal traitée et rédigée. Elle est particulièrement emblématique des travers de certains candidats et du manque de précision constaté dans les réponses par les correcteurs de cette épreuve. De trop nombreux candidats se contentent d'explications lapidaires et formelles en écrivant simplement :

$$A \exp(B) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} A = \exp(B)A,$$

passant sous silence les passages à la limite qui devaient être impérativement pris en compte dans les justifications. Très souvent, la seule justification au calcul précédent se limite à une phrase du type : *par une récurrence immédiate on a  $AB^k = B^kA$  donc on a...* Les correcteurs attendaient pourtant des candidats les justifications suivantes :

- (i) un argument de récurrence (détaillé ou non) pour expliquer que pour tout entier naturel  $k$  on a  $AB^k = B^k A$ ,
- (ii) le passage intermédiaire par les sommes partielles affirmant que pour tout  $N \geq 0$ ,  

$$A \sum_{k=0}^N \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{B^k}{k!} A,$$
- (iii) le recours à la continuité des produits matriciels  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$ ,
- (iv) le passage à la limite final.

Le barème de cette question ayant été découpé en fonction des critères précédents, il va de soi que les réponses non détaillées et non rigoureuses ont engendré d'importantes pertes de points.

**Q2** - Cette question a souffert également d'un manque de précision et de rigueur important dans les explications. Très peu de candidats ont réussi à justifier proprement que l'application  $g$  était de classe  $\mathcal{C}^1$ , la plupart des réponses se contentant d'invoquer un simple « produit » de fonctions  $\mathcal{C}^1$ , les « opérations usuelles » ou encore les fameux « théorèmes généraux ». Ce type d'argument ne s'applique pas ici car les fonctions sont à valeurs matricielles et il faut remarquer que  $g$  s'écrit comme  $B(u, v)$  où  $B$  est bilinéaire et  $u$  et  $v$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^1$ . De manière similaire, une infime portion des copies comportent un énoncé clair et précis du Théorème de Cauchy qui s'applique dans ce contexte, la plupart des candidats invoquant *l'unicité des solutions au problème de Cauchy* parfois sans vérifier la condition initiale. Bien des candidats ont par la suite éprouvé des difficultés pour passer de l'équation  $g = f_A$  à la relation (1) attendue. Il s'agissait de multiplier à droite par  $e^{tB}$  et d'utiliser la formule donnant l'inverse d'une exponentielle de matrice. A noter que certains candidats n'hésitent pas à diviser par des matrices ou encore à écrire  $e^{tB}e^{-tB} = 1$ .

**Q3** - Il s'agit ici de démontrer la réciproque à la question précédente. Cette question a donné lieu à un florilège de calculs plus ou moins vrais et plus ou moins rigoureux, parfois sans la moindre explication (notamment au niveau des commutations de matrices) et parfois même avec quelques « arnaques » en fin de preuve. Essentiellement, après deux dérivations, on aboutissait à la relation  $(A + B)^2 e^{t(A+B)} = A^2 e^{t(A+B)} + e^{tA} B^2 e^{tB} + 2A e^{tA} B e^{tB}$ , laquelle est valable pour tout réel  $t$ . Il suffisait alors d'évaluer en zéro pour aboutir à  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$  ce qui permettait de conclure après simplification. Au lieu d'évaluer en zéro tout simplement, beaucoup de candidats ont tenté d'opérer des « simplifications » dans l'équation précédente et ont tourné en rond dans leurs calculs sans succès.

**Q4** - L'idée générale d'employer l'inégalité triangulaire ayant été globalement comprise, cette question nécessitait une rédaction précise et complète. Il fallait par exemple utiliser les sommes partielles et justifier proprement le passage à la limite, par un argument de continuité de la norme. Par ailleurs, peu de candidats ont remarqué que l'énoncé donnait  $\|A^0\| = 1$  pour démontrer ensuite que  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  pour tout entier naturel  $k$ .

**Q5** - Cette question relativement classique se traitait bien en trigonalisant la matrice, pour autant que l'on justifie soigneusement la forme de la partie diagonale de l'exponentielle d'une matrice triangulaire. A noter que certains candidats ont supposé que la matrice  $A$  était diagonalisable tandis que d'autres ont carrément déclaré que le déterminant était linéaire. Enfin, des candidats ont voulu utiliser la décomposition de Dunford ici et l'ont démontré au préalable. Ils n'ont certainement pas vu que ce

point était traité plus tard dans le sujet et les correcteurs de l'épreuve ne peuvent que déplorer un manque de lecture du sujet.

**Q6** - Cette question, parmi les plus faciles du sujet, a été dans l'ensemble relativement bien traitée. Certaines copies faibles ont parfois confondu les propriétés usuelles de l'exponentielle réelle avec celles de l'exponentielle de matrice abordées précédemment. Quelques confusions sur la terminologie adéquate ont été relevées avec « propriété de la norme » ou même « Cauchy-Schwarz » en lieu et place de l'inégalité triangulaire.

**Q7** - Cette question nécessitait d'effectuer un développement limité à l'ordre deux qui n'a été que très rarement proprement justifié. Parmi les erreurs fréquentes celle d'écrire « 1 » au lieu de l'identité pour terme constant alors que les fonctions sont à valeurs matricielles ou bien celle de faire un développement limité à l'ordre 1 et d'identifier  $o\left(\frac{1}{k}\right)$  avec un  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . De nombreuses copies ont d'emblée majoré la norme de la différence par la somme des normes ce qui évidemment ne peut pas fonctionner.

**Q8** - La première partie de la question qui reposait sur une somme télescopique fut relativement bien traitée mais de trop nombreux candidats empilent les lignes de calcul sans la moindre explication et ne font pas ressortir clairement l'argument permettant de conclure (somme télescopique ou changement d'indice). Il est essentiel de bien mettre en valeur les arguments employés ; des lignes de calculs enchaînées sans ligne directrice ni explications claires ne sauraient constituer une rédaction valable. Dans la seconde partie de la question, après avoir prouvé que  $\lim_k X_k^k - Y_k^k = 0$ , bien de candidats ont déduit que  $\lim_k X_k^k = \lim_k Y_k^k$  sans avoir expliqué ou prouvé au préalable que nombre de ces limites existaient. Il fallait alors remarquer que  $Y_k^k = \exp(A + B)$  pour tout entier  $k$ , par exemple en utilisant les propriétés de l'exponentielle de matrice,  $A + B$  commutant avec elle même.

**Q9** - Cette question qui nécessitait de déterminer l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire fut dans l'ensemble relativement bien traitée et le lien avec la question (5) compris. Toutefois, de nombreuses copies perdent inutilement des points avec une rédaction très approximative et non rigoureuse avec des équivalences non valables dans les raisonnements. Assez étrangement, l'équivalence  $[\forall t \in \mathbb{R}, \text{Tr}(tM) = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 0]$  a posé quelques soucis à certains candidats alors qu'il suffisait pour le sens direct d'évaluer en  $t = 1$  par exemple. Dans d'autres copies on a pu voir écrit qu'une matrice de trace nulle possède des termes diagonaux nuls.

**Q10** - Cette question nécessitait de déterminer l'algèbre de Lie du groupe orthogonal. Elle est plus difficile que la précédente et a été bien moins résolue. Elle a en particulier révélé des lacunes au niveau de la logique élémentaire avec des égalités d'ensembles déduites d'une seule implication prouvée. En particulier il était ici plus facile de montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_G$  pourvu que l'on remarque que  ${}^T e^{tM} = e^{t{}^T M}$  dont la démonstration rigoureuse nécessitait d'utiliser la linéarité et la continuité de l'application transposée. L'implication réciproque plus délicate pouvait se démontrer par exemple en dérivant la relation  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} e^{t{}^T M} = I_n$  et en évaluant en  $t = 0$ . Certains candidats ont supposé pour cette implication que  $M$  et  ${}^T M$  commutaient ou encore ont invoqué l'injectivité de l'exponentielle de matrice sur  $M_n(\mathbb{R})$  ce qui n'est pas valable dès que  $n \geq 2$ .

**Q11** - Cette question, pourtant non triviale, a été dans l'ensemble correctement traitée, même dans certaines copies plutôt faibles. Parmi les erreurs fréquentes on notera l'oubli de la vérification de  $\mathcal{A}_G \neq \emptyset$  ou pire encore des « preuves » du fait que  $I_n \in \mathcal{A}_G$  ce qui dénote une confusion importante entre les notions de groupe multiplicatif et d'espace vectoriel.

**Q12** - Cette question nécessitait d'utiliser la formule  $e^{PBP^{-1}} = Pe^BP^{-1}$  avec  $P = e^{tA}$  ainsi que la stabilité d'un groupe par produit. Certains candidats bien qu'ayant bien compris l'idée générale ont oublié d'introduire un paramètre  $x \in \mathbb{R}$  dans le calcul de l'expression  $\exp(xe^{tA}Be^{-tA})$  qui était pourtant nécessaire pour coller à la définition d'une algèbre de Lie.

**Q13** - Cette question plus délicate n'a été traitée que dans les bonnes copies. Il fallait dériver l'application  $u$ , puis évaluer la dérivée en  $t = 0$ . En interprétant la dérivée comme la limite d'un taux d'accroissement dans  $\mathcal{A}_G$  qui est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc de dimension finie et fermé, on aboutissait au résultat. Si le calcul de  $u'(t)$  a été souvent correctement fait. L'utilisation de la fermeture de  $\mathcal{A}_G$  a été bien plus rarement proprement effectuée. Certains candidats ont utilisé le fait que  $\mathcal{A}_G$  était une algèbre, donc stable par produit, ce qui n'est pas le cas comme les exemples des questions 9 et 10 en attestent. Mentionnons enfin qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer les résultats du cours (sauf si explicitement demandé par l'énoncé), en particulier le fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé pouvait être utilisé sans preuve.

**Q14** - Cette question plus facile reposait sur le calcul de la dérivée en  $t = 0$  de  $t \mapsto e^{tM}$  a été le plus souvent correctement traitée même dans des copies particulièrement faibles.

**Q15** - Cette question faite le plus souvent dans les bonnes copies pouvait se traiter en revenant à la définition du déterminant comme somme indexée sur les permutations ou encore en utilisant la dérivée des formes multilinéaires, mais la solution la plus simple à mettre en place était peut-être basée sur la trigonalisation de  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q16** - Cette question découle directement de la précédente mais nécessitait une bonne connaissance du cours de calcul différentiel et notamment la compréhension du lien entre la notion de différentielle et d'application différentiable avec les dérivées directionnelles.

**Q17** - Cette question de synthèse utilisait le résultat de la Q16, les définitions des groupes  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$ , ainsi que la définition de l'espace tangent à  $G$  en l'identité. Il fallait pour la traiter maîtriser correctement la règle de la chaîne pour les composées d'applications différentiables, ce qui n'a été observé que dans les bonnes copies.

**Q18** - La première partie de la question consistant à prouver la similitude des matrices n'a été que rarement correctement traitée. Deux approches étaient possibles. La première consistait à utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ainsi que le lemme des noyaux, puis à utiliser la stabilité des sous-espaces caractéristiques et la trigonalisation des endomorphismes induits pour conclure. La seconde consistait à construire « à la main » une base adéquate à partir d'une base adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques. Cette approche fut tentée par de nombreux candidats qui ont buté sur des difficultés calculatoires et n'ont pas réussi ou n'ont pas pensé à démontrer que le système de vecteurs ainsi construit était bien une base. Cette question a également révélé d'importantes difficultés chez des candidats qui confondent les notions de sous-espace caractéristique et de sous-espace propre. Ils omettent de vérifier la stabilité des sous-espaces avant de considérer les endomorphismes induits, mélangeant, voire confondant, les concepts de diagonalisabilité et de trigonalisabilité. Ils considèrent que deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont semblables ou bien encore mélangent les notions de polynômes irréductibles et de polynômes premiers entre eux.

La deuxième partie de la question consiste à calculer les puissances de  $T$  et  $e^T$ . Si le calcul des

puissances a été généralement traité de façon correcte par une récurrence, bien des candidats ont ensuite buté sur les calculs de séries qui étaient nécessaires pour déterminer  $e^T$ .

La dernière partie de cette question consiste à prouver que  $e^{tA} \rightarrow 0$  si et seulement si les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative. Au lieu de cela, bien des candidats ont écrit que  $\alpha < 0, \beta < 0$  alors qu'il s'agit pourtant de nombres complexes ! La relation  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$  n'a été aperçue que dans un petit nombre de copies et ne semble pas maîtrisée par un grand nombre de candidats. En outre, il fallait justifier rigoureusement que  $e^{tA} \rightarrow 0 \Leftrightarrow e^{tT} \rightarrow 0$ , ce qui pouvait se faire par exemple en utilisant la continuité de l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$ . Cette étape n'a été aperçue que dans les meilleures copies.

**Q19** - Cette question reprenait certains des arguments de la question précédente et a provoqué les mêmes sortes de difficultés que précédemment.

**Q20** - Cette question est un cas d'école d'application du lemme des noyaux. Outre les difficultés précédemment citées, on notera une confusion fréquente entre les notions de polynômes premiers entre eux deux à deux et la notion de polynômes globalement premiers entre eux. Par ailleurs, le fait que les polynômes  $(X - \lambda)^{m_\lambda}$  soient effectivement premiers entre eux deux à deux n'a été que rarement justifié. Enfin certains candidats confondent les notions de polynômes et de polynômes d'endomorphisme. Le jury tient à rappeler que citer à la volée des noms de théorèmes ne constitue en rien une démonstration. Invoquer sans davantage de détails le lemme des noyaux et Cayley-Hamilton a induit d'importantes pertes de points.

**Q21** - Cette question consistait à établir le théorème de décomposition de Dunford. L'erreur la plus fréquemment observée consiste à trigonaliser la matrice puis à affirmer que la partie diagonale et la partie constituée des éléments au-dessus de la diagonale conviennent. Bien évidemment, en général ces deux matrices ne commutent pas et ne répondent donc pas aux critères de la décomposition de Dunford.

**Q22** - Cette question de synthèse nécessitait l'emploi de la décomposition de Dunford et le calcul d'une exponentielle de matrice nilpotente. Il fallait ensuite utiliser que  $e^{D+N} = e^D e^N$  et passer à la norme pour aboutir. Délicate à mettre en place, cette question n'a été bien traitée que dans les meilleures copies.

**Q23** - Cette question utilise la question précédente pour établir la réciproque à la question 19. L'usage du théorème de croissance comparée a semblé-t-il posé quelques problèmes à certains candidats.

**Q24** - S'agissant des questions plus délicates de la fin du sujet, de même que pour les deux questions précédentes, le jury a davantage noté les idées plutôt que l'enchaînement précis des arguments. Beaucoup de copies partent du principe que la limite de  $\exp(tA)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini existe, et procèdent alors par « contraposée de la question 19 ». Ceci fait ressortir d'importantes lacunes en analyse pour l'existence de la limite mais aussi en algèbre linéaire pour avoir écrit  $BX = 0$  implique  $X = 0$  ou  $B = 0$ .

**Q25 - Q26** - La première partie de la question 25 fut assez souvent traitée correctement même si certains candidats démontrent que l'intersection des trois sous-espaces est réduite à  $\{0\}$  pour déduire ensuite la somme directe. La seconde partie de la question 25 et la question 26 n'ont été traitées que très rarement par les meilleures copies.