À la question 15, il y avait bien des arguments intuitifs pour dire que les évènements n'étaient pas indépendants, mais dans ce genre de situation l'arme absolue reste le contre-exemple.
La plupart des bonnes copies s'arrêtaient là, la suite n'étant abordée que de manière extrêmement lacunaire et par des candidats qui avaient sauté une bonne partie du problème.

Nous avons trouvé quelques bonnes solutions pour la question 16.

À la question 17, une idée intuitive consistant à inverser une liste croissante pour obtenir une liste décroissante, puis seulement quelques résultats épars pour les questions suivantes, personne ne traitant complètement la question 20.

En résumé, on peut conseiller aux futurs candidats de ne pas faire d'impasse, le sujet peut porter sur une partie étroite du programme, d'essayer de prendre un peu de recul, d'entrer dans le problème plutôt que le considérer comme un empilement de questions et d'essayer de traiter une partie significative du problème sans chercher à aller au bout, sur ce sujet en particulier le grappillage ne payait pas.

1.2.2. Mathématiques II — MP

Disons-le d'emblée, l'impression générale des correcteurs à l'issue de cette session est une dégradation sensible de la qualité des copies, tant du point de vue de la présentation et de la rédaction que pour ce qui concerne le contenu mathématique. L'orthographe en est la manifestation la plus visible, et les noms propres ne sont pas épargnés : Cauchy, Schwarz, Cayley et Hamilton se retourneraient dans leur tombe s'ils voyaient comment les candidats écrivent leur nom. Les conjugaisons des verbes *conclure* et *résoudre* présentent désormais des formes nouvelles et inattendues. De nos jours, les systèmes sont solubles ou solvables, mais on ne sait dans quels liquides ni avec quelles liquidités. Mais surtout, c'est l'attitude du candidat devant le problème qui a changé. Plutôt que de rédiger avec soin et l'une après l'autre les questions posées, il fait au plus vite, sans justifier toutes ses assertions, sans fournir un minimum d'étapes de calcul, et cherche à traiter ainsi le maximum de questions. De nombreux points « de détail » sont omis, mais comme chacun sait, le diable est dans les détails : oubli de vérifier qu'une matrice est symétrique définie positive, qu'une autre matrice n'est pas nulle, qu'une application est linéaire, qu'une autre application est bijective, et bien d'autres encore. Il va sans dire qu'une telle stratégie aboutit souvent à un résultat catastrophique, le correcteur ne pouvant accorder des points à une question dans laquelle manquent des éléments essentiels du raisonnement. Quant à la présentation, une écriture peu soignée, de nombreuses ratures, des questions non numérotées ou mal numérotées, une encre d'une pâleur à rendre jalouse la dame aux camélias — notamment en raison de l'emploi de stylos thermoeffacables — ont fréquemment rendu la tâche encore plus ardue au correcteur dans sa quête de points à accorder à la copie.

Question 1. Cette question pourtant très simple a donné lieu à des débordements invraisemblables dans un grand nombre de copies. Passons sur les confusions entre *symétrie* et *endomorphisme symétrique*, entre *polynôme de matrice* et *polynôme*. Passons encore sur le fait que nombre de candidats affirment que les matrices à la fois orthogonales et symétriques sont solutions, sans prendre la peine de justifier leur existence ni l'infinité de leur ensemble. C'est déjà mieux de dire que toutes les matrices de symétrie sont solutions, encore faut-il justifier qu'il y en a une infinité, ne serait-ce qu'en disant qu'il y a une infinité de couples de droites vectorielles non confondues. Les candidats qui ont reconnu que seuls I_2 et $-I_2$ sont des polynômes en I_2 ne sont pas la majorité, et moins nombreux encore sont ceux qui l'ont justifié correctement, ou tout simplement ont essayé de le justifier, sans quoi cette assertion ne rapportait aucun point.

Fréquemment, les candidats se sont lancés dans la résolution explicite du système $A^2 = I_2$ en les quatre coefficients de A. Certains y sont parvenus correctement et ont pu conclure, d'autres ont commis des erreurs de calcul et de logique, mais ont obtenu tout de même un ensemble infini de solutions. Mais d'autres encore ont décidé pour commencer de diagonaliser I_2 , puis d'en déduire que l'ensemble des puissances de I_2 est un ensemble infini de solutions. D'autres, plus subtilement, ont obtenu l'ensemble infini de matrices solutions $\begin{pmatrix} \cos(2k\pi) & \sin(2k\pi) \\ \sin(2k\pi) & -\cos(2k\pi) \end{pmatrix}$. Pis encore, certains démontrent par récurrence sur n que la puissance n-ième de I_2 est I_2 , d'autres affirment que les transposées successives de I_2 constituent une infinité de solutions… Mentionnons pour mémoire ceux qui expliquent que I_2 est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée, et ceux qui se donnent une matrice diagonalisable admettant la seule valeur propre 1. Bref, cette question qui devait permettre aux candidats d'entrer dans le problème en engrangeant facilement des points nous a fait visiter une véritable cour des miracles mathématiques.

Question 2. Paradoxalement, cette question a été plutôt mieux traitée que la précédente. L'erreur la plus fréquente a été d'affirmer que si le carré d'une matrice est triangulaire alors cette matrice est nécessairement triangulaire, ce qui du reste n'avait aucun intérêt, car on ne demandait pas de trouver toutes les racines carrées de A, mais seulement d'en exhiber une infinité. Ensuite, beaucoup de candidats ont bien écrit un polynôme en A sous la forme $X = a_0 I_3 + a_1 A$, mais au moment d'élever au carré, peu d'entre eux ont justifié l'annulation des coefficients par le caractère libre de la famille (I_3 , A) et certains ont oublié le coefficient 2 du double produit, ce qui ne change pas le résultat, mais coûte tout de même une fraction de point.

Question 3. De nombreux candidats se précipitent sur la question de l'unicité de la racine carrée sans même penser à établir son existence. Quand c'est le cas, ils ne sont pas la majorité à vérifier que celle qu'ils ont obtenue est bien symétrique définie positive, ce qui leur permettrait sans doute de se rendre compte qu'il est nécessaire de diagonaliser A dans une base orthonormée, autrement dit avec une matrice de passage orthogonale. Quant à la preuve de l'unicité, elle consiste souvent en une page ou deux de raisonnements qui restent à la surface du problème, à la suite de quoi vient l'affirmation non justifiée « donc les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres, donc elles sont égales ». Certains candidats utilisent de manière pertinente le lemme des noyaux, mais ne pensent pas à en vérifier les hypothèses. Enfin, mentionnons que nous avons lu dans plus de la moitié des copies l'expression « théorème *spectral**e*** ».

Question 4. Cette question a été assez délicate à corriger, car de nombreux candidats se sont contentés de faire de la paraphrase, autrement dit d'affirmer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente à un système quasiment identique à celui qui est fourni par l'énoncé. Nous attendions au minimum la mise en évidence du résultat du produit matriciel, et en particulier la justification des limitations sur les indices de sommation résultant de son caractère triangulaire. Par ailleurs, de nombreux candidats ont affirmé que l'on peut résoudre le système obtenu parce qu'il admet autant, voire plus, d'équations que d'inconnues, certains affirmant qu'il est linéaire, voire qu'il est de Cramer… Quant à ceux qui ont essayé de vérifier la condition sur les termes diagonaux, ils se sont souvent lancés dans la recherche laborieuse des racines carrées d'un nombre complexe, alors qu'il suffisait de dire que quand $t_{i,i} = t_{j,j}$ on choisit $u_{i,i} = u_{j,j}$ et quand $t_{i,i} \neq t_{j,j}$ alors $u_{i,i} + u_{j,j}$ est nécessairement non nul.

Question 5. Une majorité de candidats ont effectué dans cette question des calculs très longs et absolument inutiles, généralement pour établir que si z est solution de l'équation $z^2 = t$ alors $-z$ l'est également, mais quelquefois aussi pour « démontrer » que t admet une unique racine carrée. Nombreux ont également été ceux qui ont affirmé qu'$\widetilde{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive. Passons sur ceux qui, pour utiliser le résultat de la question précédente, ont écrit A comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

Question 6. Ce sont bien la moitié des candidats qui ont majoré le carré d'une somme par la somme des carrés : il est pourtant facile de remarquer que $(1+1)^2$ n'est pas majoré par $1^2 + 1^2$! Un grand nombre d'entre eux n'ayant pas introduit de modules ont écrit des inégalités entre nombres complexes. On a vu aussi invoquer le produit de Cauchy, ou même le théorème de Fubini pour intervertir des symboles de sommation… En fin de compte, seule une petite minorité de candidats ont traité correctement cette question pourtant fort simple.

Question 7. Nous avons lu de nombreux errements concernant le polynôme minimal. Non, il n'est pas toujours à racines simples. Non, il ne comporte pas d'autres racines que les valeurs propres. Non, le polynôme minimal d'un produit de matrices n'est pas le produit de leurs polynômes minimaux. En outre, le fait qu'une matrice annule son polynôme minimal n'a rien à voir avec le théorème de Cayley-Hamilton, et nul n'est besoin d'invoquer ce théorème pour montrer que les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres : il suffit d'écrire $AX = \lambda X$ et d'en déduire $m_A(A)X = m_A(\lambda)X$.

Concernant la deuxième partie de la question, une erreur courante a été d'affirmer que si $AM = MB$ et si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, alors MX est un vecteur propre de A associé à cette même valeur propre λ, sans voir que MX peut éventuellement être nul. Les candidats qui ont supposé M inversible ont ainsi validé ce raisonnement, mais n'ont pas justifié le résultat demandé dans le cas général. Plus grave, de nombreux candidats ont confondu matrice nulle et matrice non inversible, spectres différents et spectres disjoints, ou ont remplacé l'inconnue par une matrice dans l'expression du polynôme caractéristique, et ont ainsi obtenu $\chi_A(B) = \det(BI_n - A) = \det(B - A)$; ou, dans le même ordre d'idée, ont affirmé que si $AM = MB$ alors le polynôme $XM - MB$ est annulateur de A.

Question 8. De nombreux candidats ont pris pour Y un vecteur propre pour B et non pour sa transposée, et au prix de quelques contorsions calculatoires plus ou moins correctes, ont réussi à établir que la matrice XY^T convient. D'autres ont affirmé qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres (ce qui est vrai) et les mêmes sous-espaces propres (ce qui est généralement faux) ; d'autres encore ont écrit sans sourciller que s'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AMX = MBX$ alors $AM = MB$, comme si les vecteurs colonnes non nuls étaient des éléments réguliers du produit matriciel.

Question 9. La définition de la différentielle donnée par les candidats est souvent approximative, voire incomplète, ou même fausse. Le reste est souvent un $o(H^2)$ ou un $o(1)$ et non un $o(H)$. Dans cette question comme dans les suivantes, un certain nombre de candidats ne tiennent aucun compte de la non-commutativité du produit matriciel, et écrivent par exemple $dF_H(X) = 2HX = XH + HX$. Dans la suite de la question, l'inversibilité de dF_X a posé des problèmes à beaucoup : certains l'ont confondue avec l'inversibilité de la matrice $dF_X(H)$, d'autres ont trouvé qu'elle a lieu si et seulement si X et H n'ont aucune valeur propre en commun. La plupart ont donné la condition correcte (X et $-X$ n'ont aucune valeur propre en commun), mais nombreux sont ceux qui ont écrit qu'elle équivaut à X inversible, alors que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple flagrant à la réciproque de cette affirmation.

Question 10. L'inversibilité de $\mathrm{d}F_{X^*}$ résulte évidemment du fait que X^* admettant uniquement des valeurs propres à partie réelle strictement positive ne peut avoir deux valeurs propres opposées l'une de l'autre. Mais bien sûr, les candidats qui ont écrit à la question précédente que l'inversibilité de $\mathrm{d}F_X$ équivaut à celle de X se sont généralement contentés d'établir que X^* est inversible, ce qui ne leur a rapporté aucun point. L'inversibilité de $\mathrm{d}F_X$ pour X appartenant à un voisinage de X^* résulte de la continuité de l'application de $\mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ dans $\mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathrm{C}))$ qui à X associe $\mathrm{d}F_X$, ce que peu de candidats ont explicité correctement et complètement.

Question 11. Si la plupart des candidats ont montré que $G(X^*) = X^*$, peu d'entre eux ont calculé correctement $G(X^* + H) - G(X^*)$, beaucoup ayant effectué des calculs faux et non justifiés, faisant tout pour obtenir le résultat fourni par l'énoncé ; ensuite, quasiment aucun n'a obtenu le résultat demandé pour $(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}$; il semble qu'ils ont été nombreux à croire que cette formule était donnée par l'énoncé et qu'ils pouvaient l'admettre.

Question 12. Le recours à la norme d'opérateur sur l'espace vectoriel des matrices complexes, notion hors programme, a été sanctionné, sauf pour les candidats qui ont établi qu'il s'agit bien d'une norme avant de prouver l'inégalité demandée.

Question 13. L'inégalité demandée ne pouvait être établie à partir des hypothèses faites : il était nécessaire de modifier la constante pour obtenir un résultat valable. Seule l'hérédité fonctionnait, et celle-ci a été rémunérée quand elle a été correctement rédigée avec la formule proposée. Nous avons également récompensé les candidats qui ont signalé que la formule était fausse, et davantage encore ceux qui ont proposé une formule viable et l'ont établie. Il est regrettable qu'ils aient été nombreux à conclure à la convergence de la suite (X_k) vers X^*, sans condition sur la constante ρ, et corrélativement sur la proximité de X_0 par rapport à X^*.

Question 14. Cette question a été révélatrice du manque de rigueur d'un grand nombre de candidats. Les hypothèses sur X et U étaient confondues et mêlées aux conclusions, les raisonnements manquaient de rigueur, les étapes essentielles des calculs n'étaient pas fournies ; nombreux sont ceux qui sont passés en force en affirmant qu'ils avaient établi l'équivalence entre les conditions données alors qu'ils n'avaient rien établi du tout. C'est en particulier le caractère bien défini des suites (X_k) et (U_k) qui a manqué dans les raisonnements proposés, du reste il n'était souvent même pas mentionné. Les récurrences aussi ont été particulièrement maltraitées : très souvent, l'hypothèse de récurrence n'était pas fournie, l'hérédité était bâclée et la conclusion absente. Enfin, la réciproque se réduisait parfois à une simple phrase disant « on montre de même que… » alors que le raisonnement n'était pas du tout identique.

Question 15. Cette question a connu les mêmes errements que la question précédente pour ce qui est du caractère bien défini de la suite (V_k). Un certain nombre de candidats n'ont pas jugé utile d'établir que U_k et V_k sont égaux, quant à la commutation de V_k avec A, elle a souvent fait l'objet de contorsions logiques ôtant toute valeur aux raisonnements proposés.

Question 16. Une fois de plus, la récurrence requise dans cette question a été souvent complètement bâclée. Du reste, sa rédaction s'est souvent réduite à une succession de calculs, alors qu'un minimum de justifications était nécessaire. Signalons que certains candidats ont affirmé que le produit de deux matrices symétriques est toujours une matrice symétrique, ce qui a singulièrement simplifié leur raisonnement, mais est malheureusement faux.

Question 17. Cette question résultait simplement de la précédente et requérait une nouvelle fois une rédaction convenable de la récurrence, ce qui a rarement été le cas.

Question 18. Il fallait d'abord établir que la suite $(\lambda_{k,\ell})$ converge vers $\sqrt{\lambda_\ell}$, ce qui ne résulte pas directement de la question 17, mais requiert d'abord d'expliciter $\lambda_{k,\ell}$; ensuite il fallait exprimer V_k à l'aide de la matrice diagonale des $\lambda_{k,\ell}$ et mentionner la continuité du produit de matrices pour pouvoir conclure correctement.

Question 19. De nombreux candidats ont établi correctement la deuxième relation, par contre la première n'a été que rarement démontrée.

Questions 20 et 21. Ces questions n'ont été abordées que par un nombre très restreint de candidats.

Conclusion. Le concours commun Mines Ponts est souvent perçu comme difficile, et de fait les épreuves proposées ne sont pas élémentaires. Toutefois, leur caractère progressif et la présence de questions classiques ou proches du cours permettent à des candidats sérieux de réussir s'ils font l'effort de rigueur requis dans leur rédaction. Il importe pour eux de s'y entraîner tout au long des deux années de préparation, en tenant compte scrupuleusement des conseils et remarques prodigués par leur professeur. Qu'aucun ne s'imagine être au-dessus de ces contingences : comme disait Thomas Edison, *« Genius is 1 percent inspiration and 99 percent perspiration »*. Ou, plus sobrement, que chacun fasse sienne la devise bien connue des taupins : « *M S KOH* » (aime, souffre et potasse).