

Banque MP inter-ENS – Session 2022

Rapport relatif à l'épreuve écrite de Mathématiques D

Épreuve spécifique à l'ENS Paris

Coefficient (en % du total d'admission) : 5,6% pour les deux options (MP et MPI)

Jury : Kévin Destagnol, Amaury Freslon, Jérémy Guéré, Yann Palu, Nicolas Tholozan.

Statistiques : Sur les 1879 inscrits, 1260 ont composé. Voici la répartition du nombre de copies en fonction de la note :

- supérieure ou égale à 5/20 → 527 copies
- supérieure ou égale à 7/20 → 349 copies
- supérieure ou égale à 10/20 → 201 copies
- supérieure ou égale à 13/20 → 88 copies
- supérieure ou égale à 16/20 → 28 copies

La moyenne est de 5,38 et l'écart-type de 4,09.

Présentation du sujet

L'épreuve se proposait d'étudier les solutions entières et rationnelles d'une équation quadratique en trois variables :

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 = -1 .$$

Elle comportait 8 parties de longueurs inégales. La partie 1 présentait un critère préliminaire d'équidistribution d'une suite de parties finies d'un rectangle. Les parties 2 à 6 étudiaient la géométrie et les symétries du problème pour en déduire une asymptotique du nombre de solutions de dénominateur fixé lorsque l'une des coordonnées tend vers l'infini. La partie 7, indépendante des précédentes, démontrait des résultats d'arithmétique modulaire utilisés dans la partie 8 pour étudier l'asymptotique du nombre de solutions contenues dans un compact fixé lorsque le dénominateur tend vers l'infini.

Le sujet était particulièrement long et une seule copie a eu le temps d'aborder la partie 8. Il suffisait cependant de traiter partiellement le sujet pour obtenir une très bonne note.

Les bonnes copies ont typiquement traité en profondeur les parties 1 à 4, ou ont traité les parties 1 à 3 et la première moitié de la partie 7.

Le sujet contenait malheureusement une erreur grossière : à la question 1.4, les constantes n'étaient manifestement pas les bonnes. Le concepteur du sujet, qui assume l'entière responsabilité de cette erreur, voulait écrire :

$$f_{b,n}(t) = P_{\cos^2(\frac{\pi}{2}b)} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \right)$$

converge uniformément vers 1 sur tout compact de $] -b, b[$ et converge uniformément vers 0 sur tout compact de $[-1, -b[\cup]b, 1]$.

La notation a été adaptée. Plusieurs copies ont repéré le problème, ce qui a été récompensé. Hormis cette erreur, le sujet contenait 4 typos qui ne semble pas avoir gêné les candidats et candidates :

- **Question 1.3** : $\mathcal{T}([0, 1])$ aurait dû être $\mathcal{T}([-1, 1])$
- **Question 1.6** : \mathcal{T} aurait dû être $\mathcal{T}([-1, 1] \times [-1, 1])$
- **Question 4.6** : G aurait dû être G_0
- **Préambule de la partie 8** : l'application Ψ est incorrectement noté φ .

La difficulté des questions était variable et le barème donnait beaucoup de poids aux questions difficiles (et donc peu traitées) afin de favoriser les candidats et candidates ayant fait un effort de recherche sur celles et ceux se contentant de survoler le sujet à toute vitesse en ne traitant que les questions faciles. Les idées et réponses incomplètes n'étaient que marginalement comptabilisées afin de ne pas avantager les copies cherchant à gagner du temps en négligeant la précision de la rédaction.

Remarques générales

Tous les candidats et candidates ont été méritants de se confronter à une épreuve longue et difficile. Les applications classiques des outils et techniques du programme de classe préparatoire étaient rares et la plupart des questions demandaient un effort de recherche et de réflexion. Un grand nombre de candidates et candidats ont su fournir cet effort avec succès et peuvent en être fiers.

Un défaut généralisé mérite d'être mentionné : le manque de propreté des copies. Une proportion significative des copies avaient une écriture difficilement lisible et très peu soignée. Il ne semble donc pas inutile de rappeler ici quelques usages qui ne peuvent qu'améliorer les dispositions des correcteurs : écrire lisiblement, raturer proprement, encadrer les résultats, et effectuer les calculs au brouillon avant de les recopier

Remarques détaillées

1.1. Cette question pouvait être rapidement résolue en remarquant simplement que la dérivée

$$P'(x) = 1 - \lambda Q'(x)$$

est uniformément proche de 1 (donc positive) pour λ suffisamment proche de 0. De nombreuses copies se sont toutefois lancées dans une étude détaillée du signe de P' en fonction de λ , approche valable bien que fastidieuse, mais qui a souvent révélé des faiblesses calculatoires. La plupart de ces candidats ont cumulé des erreurs de calcul élémentaires, aboutissant à des résultats dont ils auraient aisément pu vérifier l'inconsistance.

Le jury a été surpris par le nombre de copies prétendant raisonner par « analyse-synthèse », ce qui ne semble pas pertinent ici. En général, l'analyse était une suite de calculs sans but qui aurait dû rester au brouillon, et la synthèse consistait à dire « d'après les calculs précédents, ça marche ».

1.2. Il y avait trois points à mettre en avant : la croissance de la fonction P_a^n , la monotonie de $P_a^n(x)$ et le théorème du point fixe. Cette question a été assez bien traitée, même si certaines copies ont perdu du temps à justifier des choses élémentaires, comme le fait qu'une composée de fonctions croissantes est croissante.

1.3. Beaucoup de copies se sont contentées de vérifier que le produit de deux éléments de la partie génératrice était un élément de la partie génératrice. Cet argument cachait parfois une mauvaise compréhension : certaines copies ont cru bon d'ajouter que « tout élément est inversible puisque $e_k e_{-k} = 1$ ». Ces copies n'ont pas eu les points.

1.4. Cette question devait simplement consister à « composer » le résultat de la question 1.2 avec la fonction $\cos^2(\frac{\pi}{2}t)$, mais l'erreur dans les constantes la rendait difficile. Les correcteurs ont attribué des points aux copies qui ont bloqué sur une identité du type $\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos(b)) = \cos(b)$, et plus encore à celles qui ont montré que cette identité n'était manifestement pas correcte.

1.5. Cette question délicate a rarement été traitée correctement. Tout le but de la partie 1 était de contourner le théorème de Stone–Weierstrass ou les séries de Fourier qui ne sont plus au programme. Comme l'erreur de la question 1.4 nuisait à la compréhension de la logique de cette partie, le jury a quand même accordé une partie des points au candidats invoquant ces notions.

1.6. Cette question a été bien traitée, malgré le manque de rédaction et de propreté d'un grand nombre de copies.

1.7. Une partie des points était accordée aux candidats et candidates comprenant qu'il s'agissait d'une interversion de limites. Mais trop de copies ont fait comme si l'interversion allait de soi. Les copies qui ont affirmé que la suite f_ε convergeait uniformément vers l'indicatrice du rectangle ont été pénalisées. Le fait que la limite ne soit pas continue aurait dû les alerter.

2.1. Plusieurs copies ont d'abord montré que v^\perp est un sous-espace vectoriel en revenant à la définition pour ensuite calculer la codimension en remarquant qu'il s'agit du noyau d'une forme linéaire. Il n'est pourtant pas interdit d'utiliser le fait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Beaucoup ont oublié de justifier que cette forme linéaire était non nulle, ou l'ont justifié très sommairement, alors que ce n'est pas une évidence puisque B n'est pas un produit scalaire.

2.2. C'était l'une des premières questions difficiles. Le jury a apprécié la variété des solutions qui y ont été apportées.

2.3. Certaines copies se sont contentées de vérifier le caractère défini sans vérifier la positivité.

3.1. Beaucoup de copies n'ont pas vérifié que les éléments de G sont inversibles. Certaines ont même conclu que « G est un sous-groupe de $M_3(\mathbb{R})$ ».

3.2. Il ne suffisait pas de montrer que pour tout v dans \mathcal{H} , $\pm g(v)$ appartient à \mathcal{H} pour conclure. Même s'il y avait une approche plus élémentaire, on pouvait conclure en invoquant la connexité de \mathcal{H} , à condition de la prouver !

3.3. Cette question a été bien traitée dans l'ensemble.

3.4. Il fallait non seulement montrer que s_w préserve B , mais aussi que l'image d'un vecteur de \mathcal{H} est dans \mathcal{H} . Beaucoup de copies ont oublié ce 2^e point.

3.5. Cette question a été bien traitée par les copies qui l'ont abordée.

4.1. À cause peut-être de la formulation de la question, beaucoup de copies ont cherché à démontrer que la somme de deux vecteurs tangents est encore un vecteur tangent, le plus souvent en sommant deux chemins, ce qui n'a aucune raison de rester dans \mathcal{H} . Peu de copies ont utilisé le fait pourtant au programme que les vecteurs tangents aux surfaces de niveau d'une fonction f sont contenus dans le noyau de df . On montrait ainsi que le tangent à \mathcal{H} en v est contenu dans v^\perp et il n'est pas difficile ensuite de montrer à la main qu'un vecteur de v^\perp est tangent à \mathcal{H} en v . Quelques bonnes copies ont compris cela.

4.2. Beaucoup de copies écrivent $h'(t)$ au lieu de $|h'(t)|$ dans le changement de variable.

4.3. Cette question difficile a été très peu traitée. L'astuce était de projeter $\gamma(a)$ sur l'orthogonale de $\gamma(t)$ et d'y appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

4.4. Trop peu de copies écrivent que ch est croissante sur \mathbb{R}_+ pour justifier l'inégalité.

4.5. Beaucoup de copies ont bien démontré les deux premières propriétés, mais pas la séparation. L'erreur la plus commune était d'écrire « si $d(u, v) = 0$, alors il existe un chemin de longueur nulle ».

4.6. Cette question a été plutôt bien traitée.

4.7. Cette question n'étant pas difficile, les points n'ont été donnés qu'aux copies qui ont soigneusement justifié la surjectivité en montrant que $z_v \geq 1$ pour tout v dans \mathcal{H} .

4.8. Celles et ceux qui sont arrivés jusque là ont bien traité cette question.

4.9. Cette question a été très peu traitée. Plusieurs copies ont compris que la question précédente donnait la réponse pour $u = v_0$, mais une poignée seulement a pensé à s'y ramener par une transformation de G_0 .

5.1. Cette question n'a quasiment pas été traitée.

5.2. Très peu de candidats, y compris parmi les admissibles, ont obtenu une réponse correcte à cette question purement calculatoire.

La fin de la partie 5 et la partie 6 n'ont quasiment pas été traitées, hormis la question 6.1 qui a été bien traitée mais rapportait peu de points.

7.1. Cette question pourtant très classique a vu beaucoup d'erreurs. Certains se sont contentés de dire « c'est la somme des racines d -ièmes de l'unité », ce qui n'est vrai que si k est premier avec d .

7.2. et 7.3. La définition de S_{prim} était un peu subtile et peu de copies ont justifié correctement que les applications considérées et leurs inverses envoyaient bien S_{prim} sur S_{prim} (et pas seulement S sur S).

7.3. Remarquer que l'application φ est essentiellement l'isomorphisme chinois, et que cet isomorphisme est un isomorphisme d'anneaux rendait la preuve presque immédiate. Malheureusement, aucun candidat n'a eu ce recul et la plupart des copies se sont lancées dans de longs calculs qui revenaient peu ou prou à redémontrer ce fait.

7.4. Cette question reprenait les résultats de 7.2 et 7.3 sans difficulté, mais il fallait penser à justifier que n est premier avec d_1 et m avec d_2 , ce qui a été largement oublié.

7.5. On attendait ici une justification claire de l'égalité ensembliste aboutissant à ce calcul, à savoir

$$S_{prim}(p^\alpha) = S(p^\alpha) \setminus pS(p^{\alpha-1}) .$$

7.6. Celles et ceux qui ont traité cette question l'ont en général bien faite.

7.7. Beaucoup ont oublié de préciser que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre. Les mêmes se sont en général trompés à la question 7.9.

7.8. L'erreur la plus grossière était de dire que $p^\alpha \equiv 1[4]$ puis d'appliquer 7.6 (qui ne s'applique pas puisque p^α n'est pas premier).

7.9. Ici, justement puisque $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas intègre, il ne suffit pas d'écrire $a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb)$ pour conclure.

7.10. Celles et ceux qui ont bien traité la question précédente ont en général bien traité celle-ci également.

Le reste de la section 7 et la section 8 n'ont presque pas été traitées.