Session 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES

INGÉNIEURS ÉLECTRONICIENS DES SYSTÈMES DE LA SÉCURITÉ AÉRIENNE

I.E.S.S.A.

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 3

<u>CALCULATRICE NON AUTORISEE</u>

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto)
- 2 pages d'instructions pour remplir le QCM (recto-verso)
- 6 pages de sujet numérotées de 1 à 6 (20 questions) (recto-verso)
- Certaines questions font partie d'un même exercice. La liste en est donnée ci-dessous :
    - 1 à 3
    - 4 à 7
    - 8 à 10
    - 11 à 16
    - 17 à 20

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE SESSION 2023

ÉPREUVE OBLIGATOIRE
DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve écrite obligatoire de Mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire. Vous devez **cocher** la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.

2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillon qui vous seront fournies à la demande par le (la) surveillant(e) qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.

4) Si vous voulez **corriger** votre réponse**,** n'utilisez pas de correcteur mais indiquez la nouvelle réponse sur la 2ème ligne.

5) Cette épreuve comporte 20 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page de garde du sujet.

   Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 20, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 21 à 80 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
   Pour chaque ligne numérotée de 1 à 20, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

   ► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
   la ligne correspondante doit rester vierge.

   ► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
   vous devez cocher l'une des cases A, B, C, D.

   ► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
   *vous devez cocher deux des cases A, B, C, D et **deux seulement**.*

   ► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
   vous devez alors cocher la case E.

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

	☐	☒	☐	☐	☐
1 -	A	B	C	D	E
	☐	☐	☐	☐	☐

	☐	☐	☐	☐	☒
2 -	A	B	C	D	E
	☐	☐	☐	☐	☐

	☒	☐	☒	☐	☐
3 -	A	B	C	D	E
	☐	☐	☐	☐	☐

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes et des entiers naturels. i représente le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

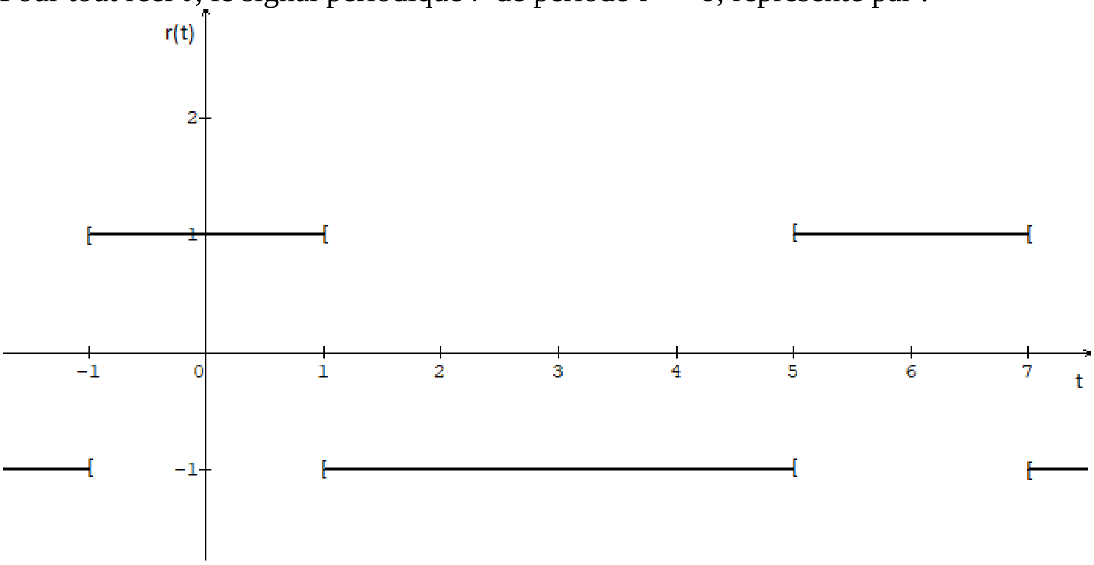
PARTIE I

Soit le signal s de période 1, défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[0; \frac{1}{3}\right[, \\ 0 \text{ si } t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right[. \end{cases}$$

Question 1

Pour tout réel t, le signal périodique r de période $T = 6$, représenté par :



vérifie :

A) $r(t) = 2s\left(\frac{t}{6} + 1\right) - 1$
B) $r(t) = 2s\left(\frac{t+1}{6}\right) - 1$
C) $r(t) = 2\left(s\left(\frac{t+1}{6}\right) - 1\right)$
D) $r(t) = 2\left(s\left(\frac{t}{6} + 1\right) - 1\right)$

Question 2

La valeur moyenne de $r(t)$, définie par $r_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)dt$ est égale à :

A) $r_{\text{moy}} = 0$ car r est un signal pair
B) $r_{\text{moy}} = -2$
C) $r_{\text{moy}} = \frac{1}{3}$
D) $r_{\text{moy}} = -\frac{1}{3}$

Question 3

La valeur efficace de $r(t)$, définie par $r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T r\ \ (t)dt}$ est égale à :

A) $r_{\text{eff}} = 1$
B) $r_{\text{eff}} = \sqrt{6}$
C) $r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$
D) $r_{\text{eff}} = \frac{1}{3}$

Question 4

Soit $\omega = \frac{\pi}{T}$; pour $n \geq 1$, le calcul de $a_n = \frac{}{T}\int_0^T r(t)\cos(n\omega t)dt$ donne :

A) $a_n = 0$
B) $a_n = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
C) $a_n = \frac{}{n\pi}\left(2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - (-1)^n\right)$
D) $a_n = \frac{1}{n\pi}\left(3\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{5n\pi}{3}\right)\right)$

Question 5

Ainsi, la décomposition en série de Fourier de $r(t)$ s'écrit :

A) $-2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\left(3\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{5n\pi}{3}\right)\right)}{n}\cos(n\omega t)\right]$
B) $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}\cos(n\omega t)\right]$
C) $-\frac{1}{3} + \frac{}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\left(2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - (-1)^n\right)}{n}\cos(n\omega t)\right]$
D) $\frac{}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - (-1)^n\right)}{n}\sin(n\omega t)\right]$

PARTIE II

Soient les nombres complexes $z_1 = 3 - 3i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

Question 6

Une forme exponentielle de z_1 est :

A) $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$
B) $z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$
C) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
D) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Question 7

Une forme exponentielle de z_2 est :

A) $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$
B) $z_2 = -2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
C) $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
D) $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Question 8

Une forme exponentielle de z_1z_2 est :

A) $z_1z_2 = 6\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
B) $z_1z_2 = 6\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
C) $z_1z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{12}}$
D) $z_1z_2 = -6\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Question 9

Une forme algébrique de z_1z_2 est :

A) $z_1z_2 = \left(-3\sqrt{3} + 3\right) + i\left(3 + 3\sqrt{3}\right)$
B) $z_1z_2 = \left(-3\sqrt{3} - 3\right) + i\left(3 + 3\sqrt{3}\right)$
C) $z_1z_2 = \left(-3\sqrt{3} + 3\right) + i\left(3 - 3\sqrt{3}\right)$
D) $z_1z_2 = \left(-3\sqrt{3} - 3\right) + i\left(3 - 3\sqrt{3}\right)$

Question 10

De ces calculs on déduit que :

A) $\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
B) $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
C) $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
D) $\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

PARTIE III

Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) \text{ et } g(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x}.$$

h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Question 11

La dérivée $h'(x)$ de $h(x)$ est :

A) $h'(x) = \frac{1}{e\sqrt{x}} - x\ln(x)$

B) $h'(x) = -\frac{1}{e\sqrt{x}} - x\ln(x)$

C) $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{e\sqrt{x}}$

D) $h'(x) = \frac{x - e\sqrt{x}}{e(x\sqrt{x})}$

Question 12

De ce calcul, on déduit :

A) La fonction h est strictement croissante sur $]0;e^2]$, et strictement décroissante sur $[e^2;+\infty[$

B) La fonction h est strictement décroissante sur $]0;e^2]$, et strictement croissante sur $[e^2;+\infty[$

C) La fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D) La fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Question 13

L'étude des valeurs atteintes par la fonction h nous permet d'affirmer que :

A) $f(x) \geq g(x)$ sur $]0;e^2]$ et $f(x) \leq g(x)$ sur $[e^2;+\infty[$

B) $f(x) \leq g(x)$ sur $]0;e^2]$ et $f(x) \geq g(x)$ sur $[e^2;+\infty[$

C) $f(x) \geq g(x)$ sur $]0;+\infty[$

D) $f(x) \leq g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Question 14

Des fonctions F et G primitives de f et g sont :

A) $F(x) = x\ln(x) - x$ et $G(x) = \frac{4}{e}x\sqrt{x}$

B) $F(x) = x\ln(x) - x$ et $G(x) = \frac{4}{3e}x\sqrt{x}$

C) $F(x) = x\ln(x) + x$ et $G(x) = \frac{4}{e}x\sqrt{x}$

D) $F(x) = x\ln(x) + x$ et $G(x) = \frac{4}{3e}x\sqrt{x}$

Question 15

Ainsi, la valeur de $I = \int_1^{e^2} h(x)dx$ est :

A) $I = 3e^2 + 1 - \frac{4}{e}$

B) $I = 3e^2 - 1 - \frac{4}{e}$

C) $I = \frac{1}{3}e^2 - 1 - \frac{4}{3e}$

D) $I = \frac{1}{3}e^2 + 1 - \frac{4}{3e}$

PARTIE IV

Question 16

La matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$:

A) n'est pas inversible
B) est inversible, d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
C) est inversible, d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$
D) est inversible, d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Question 17

On en déduit que le système linéaire (S) :$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases}$

A) n'admet aucune solution.
B) admet l'ensemble $\mathcal{S} = \{(5; -5)\}$ comme ensemble solution
C) admet l'ensemble $\mathcal{S} = \{(5; -5); (-5; 10)\}$ comme ensemble solution
D) admet une infinité de solutions

Question 18

Soit le système linéaire (S') :$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -5x + 3y = -9 \end{cases}$

Le système (S) peut s'écrire sous la forme :

A) $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
B) $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
C) $XA = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
D) $XA = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \end{pmatrix}$

Question 19

Ainsi, on en déduit que :

A) La matrice inverse de A est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
B) La matrice inverse de A est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
C) La matrice inverse de A est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$
D) La matrice A n'est pas inversible.

Question 20

La solution du système (S') est alors :

A) $\mathcal{S} = \emptyset$
B) $\mathcal{S} = \{(-3; -2)\}$
C) $\mathcal{S} = \{(3; 2)\}$
D) $\mathcal{S} = \{(-5; 17)\}$