ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2018**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

ÉPREUVE OBLIGATOIRE À OPTION

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Cette épreuve comporte :

1 page de garde recto
1 page d'instructions recto-verso pour remplir le QCM *(à lire très attentivement)*
10 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

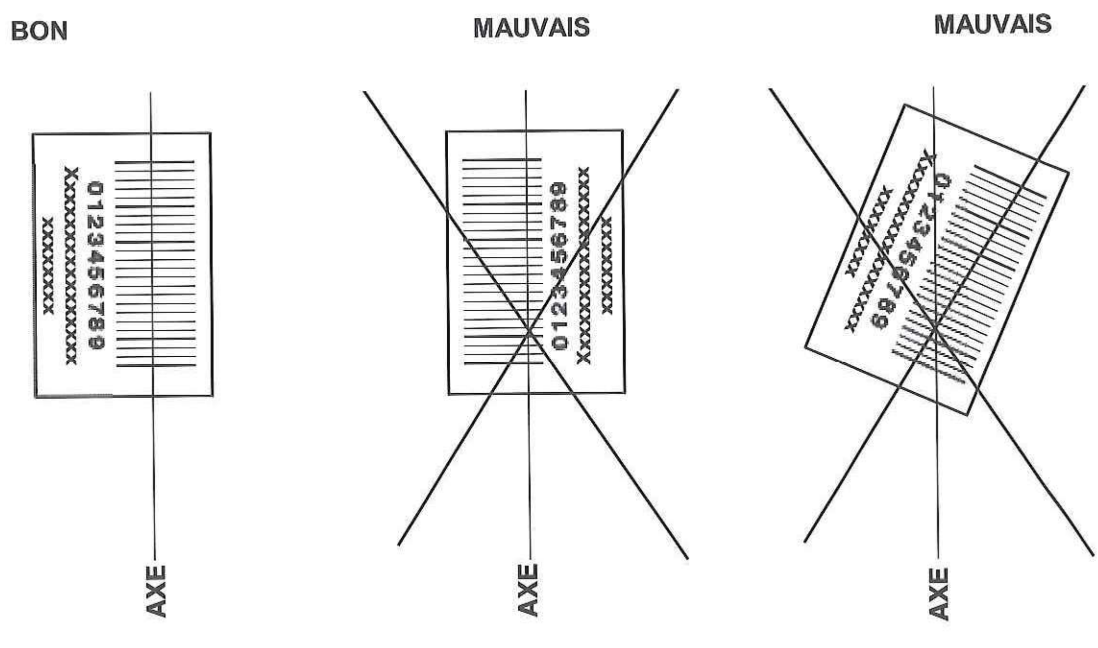
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire de mathématiques ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

<u>EXEMPLES</u> :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.
3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement****.*

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

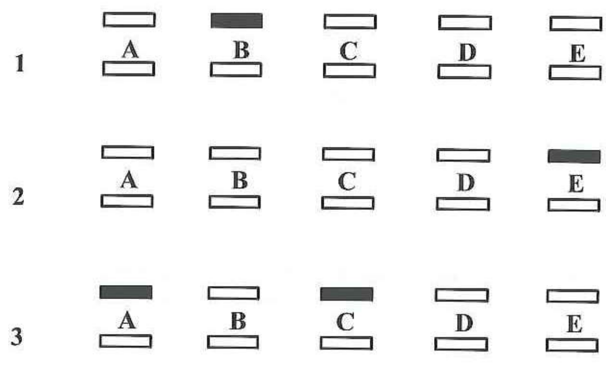
<u>EXEMPLES DE RÉPONSES</u> :

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Les ensembles de nombres usuels sont notés en caractères gras : **C** pour l'ensemble des complexes, **R** pour l'ensemble des réels, **Q** pour l'ensemble des rationnels.

PARTIE I : QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

Sauf mention du contraire, les questions de cette partie sont indépendantes les unes des autres. Les notations et le résultat de certaines d'entre elles pourront être utilisés dans les autres parties.

1) Étant donnés trois réels x, y et z, on a :

A) $x^2 + \dfrac{y^2}{3} + xy = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{12}$.

B) $x^2 + \dfrac{y^2}{3} + xy = \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) xy$.

C) $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$.

D) $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

2) L'application $u \colon (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{4} xy$ définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est :

A) un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

B) linéaire.

C) continue sur $\mathbf{R}^2$ (supposé normé) et les applications partielles $x \longmapsto u(x, y)$, pour y fixé, et $y \longmapsto u(x, y)$, pour x fixé, sont continues sur $\mathbf{R}$ (supposé normé).

D) une norme sur $\mathbf{R}^2$.

3) On suppose que $\mathbf{R}^2$ est normé. L'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |xy| \leqslant 4\right\}$ est :

A) la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 pour la norme u définie à la question 2.

B) compact.

C) borné.

D) fermé.

Tournez la page S.V.P.

4) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur un corps $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). De manière générale, on peut affirmer que :

A) toute application de E dans E et continue sur E est un endomorphisme de E.

B) si p est un entier supérieur ou égal à 1, toute application p-linéaire de E^p (muni de la norme produit) dans E est continue sur E^p.

C) toute partie fermée de E est un espace vectoriel de dimension finie.

D) l'image d'une partie compacte par un endomorphisme de E est une partie compacte de E.

5) Le produit de deux fonctions réelles f et g définies et continues sur $]0\,;\,1]$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$ si :

A) f et g sont intégrables sur $]0\,;\,1]$.

B) $|f|$ et $|g|$ sont intégrables sur $]0\,;\,1]$.

C) f^2 et g^2 sont intégrables sur $]0\,;\,1]$.

D) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

6) Soit α un réel. La fonction $t \longmapsto t^\alpha \ln t$ définie sur $]0\,;\,1]$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$:

A) si $\alpha = -1$.

B) si et seulement si $\alpha > -1$.

C) si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

D) pour tout réel α.

7) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs ou nuls, avec : $a_0 = 1$. On peut affirmer que :

A) la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 1.

B) la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

C) la série $\sum a_n$ converge.

D) la série $\sum a_{n+1} - a_n$ converge.

8) Soit (b_n) une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum nb_n$ converge. On montre alors que les séries de terme général b_n et $n(b_{n-1} - b_n)$ convergent et que l'on a :

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(b_{n-1} - b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(b_{n-1} - b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(b_{n-1} - b_n) = b_0$.

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(b_{n-1} - b_n) = 0$.

9) On désigne par A et B deux sous-ensembles non vides et minorés de $\mathbf{R}$.
On pose : $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{a + b,\ a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B}\}$, $-\mathrm{A} = \{-a,\ a \in \mathrm{A}\}$ et $\mathrm{A}^2 = \{a^2,\ a \in \mathrm{A}\}$.
Si elle existe, on note $\inf(\mathrm{C})$ la borne inférieure de $\mathrm{C} \subset \mathbf{R}$.
On peut affirmer que :

A) $\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ existe et que $\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$.

B) $\inf(-\mathrm{A})$ existe et que $\inf(-\mathrm{A}) = -\inf(\mathrm{A})$.

C) $\inf\left(\mathrm{A}^2\right)$ existe et que $\inf\left(\mathrm{A}^2\right) = (\inf(\mathrm{A}))^2$.

D) $\inf(\mathrm{A} + \{1\})$ existe et que $\inf(\mathrm{A} + \{1\}) = \inf(\mathrm{A}) + 1$.

PARTIE II : CALCUL DE DISTANCE

Dans cette partie, pour n entier naturel quelconque, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On confondra un polynôme à cœfficients réels et sa fonction polynôme associée définie sur $\mathbf{R}$.

10) Soit n un entier naturel. On a :

A) $\dim \mathbf{R}_n[X] = n$.

B) $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par produit de polynômes.

C) Le $(n+1)$-uplet de polynômes à degrés échelonnés
$(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \ldots, X(X-1)(X-2)\cdots(X-n))$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

D) l'ensemble des polynômes à cœfficients réels, de degré égal à n, est un espace vectoriel.

Pour P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$, on pose : $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

11) P et Q appartenant à $\mathbf{R}_n[X]$, et P' et Q' désignant respectivement leur polynôme dérivé, on peut affirmer que :

A) pour tout réel λ, on a : $\varphi(\lambda P, \lambda Q) = \lambda\varphi(P, Q)$.

B) $\varphi(P', Q) + \varphi(P, Q') = P(1)Q(1) - P(0)Q(0)$.

C) $[\varphi(P, Q)]^2 \leqslant \varphi(P, P)\varphi(Q, Q)$.

D) $\varphi(P', Q') = P(1)Q(1) - P(0)Q(0)$.

12) On cherche deux polynômes P_0 de degré 0 et P_1 de degré 1 vérifiant : $\varphi(P_0, P_1) = 0$. Un couple de polynômes (P_0, P_1) vérifiant cette condition est :

A) $(0, X)$.

B) $(1, X)$.

C) $(2, X-1)$.

D) $(-1, 2X-1)$.

13) On peut construire une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$, qui est muni du produit scalaire φ. Une telle base est :

A) $\left(1, \sqrt{3}(X-1)\right)$.

B) $(0, X)$.

C) $\left(1, \sqrt{3}(2X-1)\right)$.

D) $\left(1, \sqrt{2}X\right)$.

Tournez la page S.V.P.

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $]0\,;\,1]$, de carré intégrable sur $]0\,;\,1]$.

14) On peut affirmer que :

A) pour tout $\beta > -1$, la fonction $t \longmapsto t^{\beta} \ln t$, définie sur $]0\,;\,1]$, appartient à E.

B) la fonction $t \longmapsto \ln t$, définie sur $]0\,;\,1]$, appartient à E.

C) la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, définie sur $]0\,;\,1]$, appartient à E.

D) l'espace E est de dimension finie sur $\mathbf{R}$.

Pour f et g dans E, on pose : $\psi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On admet que ψ est un produit scalaire sur E.
Pour tout réel t, on pose : $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ et $p_2(t) = 2\sqrt{3}\,t - \sqrt{3}$.

15) On peut affirmer que :

A) $\psi(\ln, p_0) = 1$.

B) $\psi(\ln, p_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C) $\psi(\ln, \ln) = -\sqrt{2}$.

D) $\psi(p_1, p_2) = 0$.

On pose : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(p_0, p_1)$ et on note $p_{\mathrm{F}}(\ln)$ la projection orthogonale de ln sur F.

16) On peut affirmer que :

A) $\psi(\ln, p_{\mathrm{F}}(\ln)) = 0$.

B) $p_{\mathrm{F}}(\ln) = \psi(\ln, p_0)p_0 + \psi(\ln, p_1)p_1$.

C) $p_{\mathrm{F}}(\ln) = \psi(\ln, p_1)p_1 + \psi(\ln, p_2)p_2$.

D) $\psi(p_{\mathrm{F}}(\ln), p_{\mathrm{F}}(\ln)) = [\psi(\ln, p_0)]^2 + [\psi(\ln, p_2)]^2$.

17) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire ψ. L'ensemble $\{\|\ln - f\|,\ f \in \mathrm{F}\}$ est :

A) minoré par $\|\ln - p_{\mathrm{F}}(\ln)\|$.

B) majoré par $\|\ln - p_{\mathrm{F}}(\ln)\|$.

C) non minoré et non majoré.

D) non vide.

18) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire ψ et on pose : $d = \inf\left(\{\|\ln - f\|,\ f \in \mathrm{F}\}\right)$.
Alors on a :

A) $d^2 = \inf\left(\{\|\ln - f\|^2,\ f \in \mathrm{F}\}\right)$.

B) $d^2 = \|\ln\|^2 + \|p_{\mathrm{F}}(\ln)\|^2$.

C) $d = \min\left(\{\|\ln - f\|,\ f \in \mathrm{F}\}\right)$.

D) $d < \inf\left(\{\|\ln\| - \|f\|,\ f \in \mathrm{F}\}\right)$.

19) Les questions précédentes permettent de conclure que $\inf\left(\left\{\displaystyle\int_0^1 (\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t,\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\right\}\right)$ existe et qu'elle est égale à :

A) $\dfrac{1}{4}$.

B) $\dfrac{1}{2}$.

C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D) $\dfrac{3}{2}$.

PARTIE III : ÉTUDE D'EXTREMA

Dans cette partie, pour tout (a,b) dans $\mathbf{R}^2$, on pose : $f(a,b) = a^2 + \dfrac{b^2}{3} + ab + 2a + \dfrac{b}{2} + 2$.

20) On peut affirmer que :

A) la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$.

B) la fonction f est différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

C) si pour tout (a,b) dans $\mathbf{R}^2$, on note $\partial_1 f(a,b)$ la dérivée partielle de f par rapport à la première variable, appliquée au point (a,b), on a alors : $\partial_1 f(a,b) = 3a + \dfrac{5b}{3} + \dfrac{3}{2}$.

D) pour tout entier $k \geqslant 3$, les dérivées partielles de f d'ordre k sont toutes nulles sur $\mathbf{R}^2$.

21) Sur $\mathbf{R}^2$, la fonction f :

A) admet $(0,0)$ comme point critique.

B) n'admet aucun point critique.

C) a pour ensemble de points critiques $\left\{(0,0), \left(-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

D) admet un seul point critique.

Pour tout (a,b) dans $\mathbf{R}^2$, on pose : $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ${}^t\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et : $g(a,b) = 2a + \dfrac{b}{2} + 2$.
On admet qu'il existe une unique matrice symétrique A d'ordre 2 telle que pour tout (a,b) dans $\mathbf{R}^2$, on a : $f(a,b) = {}^t\mathrm{XAX} + g(a,b)$.
On note v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A.

22) Avec ces notations, la matrice A est :

A) égale à $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

B) inversible.

C) orthogonale.

D) égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de la matrice A et E_i l'espace propre de v associé à la valeur propre λ_i, pour i dans $\{1,2\}$.

23) Avec ces notations, on a :

A) $\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{4}{3}$.

B) pour tout i dans $\{1,2\}$, on a : $(\lambda_i - 1)\left(\lambda_i - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$.

C) pour tout i dans $\{1,2\}$, on a : $\mathrm{E}_i = \mathrm{Vect}\{(1, 2(\lambda_i - 1))\}$.

D) la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(\lambda_1 - 1) & 2(\lambda_2 - 1) \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Tournez la page S.V.P.

On munit $\mathbf{R}^2$ du produit scalaire usuel. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à une base orthonormée (e_1, e_2), où e_i est un élément de E_i, pour i dans $\{1,2\}$. On note enfin Δ la matrice représentant l'endomorphisme v dans la base (e_1, e_2).

24) Avec ces notations, on a :

A) ${}^t\mathrm{P}\Delta\mathrm{P} = \mathrm{A}$.

B) $\mathrm{P}\Delta = \mathrm{AP}$.

C) ${}^t(\Delta\mathrm{P}) = \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{P}$.

D) $\Delta\mathrm{P} = \mathrm{AP}$.

Soit δ_1 et δ_2 deux réels non nuls. On pose : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta_1} & \dfrac{1}{\delta_2} \\ \dfrac{2(\lambda_1 - 1)}{\delta_1} & \dfrac{2(\lambda_2 - 1)}{\delta_2} \end{pmatrix}$.

25) La matrice M est orthogonale :

A) si et seulement si : $\delta_1 = \delta_2$.

B) quels que soient δ_1 et δ_2, pourvu qu'ils soient non nuls.

C) si et seulement si : ${\delta_i}^2 = 1 + 4\,(\lambda_i - 1)^2$, pour i dans $\{1,2\}$.

D) si et seulement si : $\dfrac{1}{{\delta_1}^2} + \dfrac{1}{{\delta_2}^2} = 1$.

Dans toute la suite de cette partie, la matrice M est supposée orthogonale.

Pour tout (x,y) dans $\mathbf{R}^2$, on pose : $\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^t\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x,y) =& f\left(\frac{x}{\delta_1} + \frac{y}{\delta_2}, \frac{2(\lambda_1 - 1)}{\delta_1}x + \frac{2(\lambda_2 - 1)}{\delta_2}y\right) \\ g'(x,y) =& g\left(\frac{x}{\delta_1} + \frac{y}{\delta_2}, \frac{2(\lambda_1 - 1)}{\delta_1}x + \frac{2(\lambda_2 - 1)}{\delta_2}y\right) \end{aligned}.$$

26) Soit (x,y) dans $\mathbf{R}^2$. On peut écrire $f'(x,y)$ sous la forme :

A) ${}^t\mathrm{X}'\Delta\mathrm{X}' + g'(x,y)$.

B) ${}^t(\mathrm{MX}')\mathrm{A}(\mathrm{MX}') + g'(x,y)\,{}^t\mathrm{X}'\mathrm{X}'$.

C) $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{AMX}' + g'(x,y)$.

D) ${}^t\mathrm{X}'\,(\Delta + g'(x,y)\mathrm{I})\,\mathrm{X}'$, où I est la matrice unité d'ordre 2.

27) Pour tout (x,y) dans $\mathbf{R}^2$, l'écriture explicite de $g'(x,y)$ est :

A) $\dfrac{\lambda_1}{\delta_1}x + \dfrac{\lambda_2}{\delta_2}y + 2$.

B) $\dfrac{\lambda_1 + 1}{\delta_1}x + \dfrac{\lambda_2 + 1}{\delta_2}y + 2$.

C) $\dfrac{\lambda_1 - 1}{\delta_1}x + \dfrac{\lambda_2 - 1}{\delta_2}y + 2$.

D) $\dfrac{2(\lambda_1 - 1)}{\delta_1}x + \dfrac{2(\lambda_2 - 1)}{\delta_2}y + 2$.

28) Pour tout (x, y) dans $\mathbf{R}^2$, on obtient par la suite :

$f'(x, y) = \lambda_1(x+\alpha)^2 + \lambda_2(y+\beta)^2 - \dfrac{1}{4}(\gamma_1+\gamma_2) + 2$,

où α et β sont deux réels et, pour i dans $\{1, 2\}$: $\gamma_i = \dfrac{(\lambda_i+1)^2}{\lambda_i {\delta_i}^2}$.

En utilisant le fait que $\lambda_1 = u + v\sqrt{13}$, avec u et v dans $\mathbf{Q}$, et en remarquant que $\lambda_2 = u - v\sqrt{13}$, on montre que :

A) $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma_1$.

B) $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

C) $\gamma_1 + \gamma_2 = 7$.

D) $\gamma_1 + \gamma_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{52}\sqrt{13}$.

29) D'autre part, en posant, pour tout (s, t) dans $\mathbf{R}^2$: $f''(s,t) = f\left(s - \dfrac{5}{2}, t+3\right)$, on obtient :

A) $f''(s,t) = -\left(s + \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) st - \dfrac{1}{4}$.

B) $f''(s,t) = (s-1)^2 + \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{3}{4}$.

C) $f''(s,t) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

D) $f''(s,t) \geqslant \dfrac{1}{4}$.

30) On peut déduire des résultats précédents que la fonction f :

A) admet au moins un extremum global sur $\mathbf{R}^2$.

B) n'admet pas d'extremum local sur $\mathbf{R}^2$.

C) admet un extremum global unique sur $\mathbf{R}^2$ et cet extremum est un minimum.

D) admet un extremum local unique sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV : ESPÉRANCE D'UN COMPTEUR

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p, où $0 < p < 1$.

On pose : $Y_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

31) Pour $n \geqslant 1$, Y_n suit :

A) la loi de Bernoulli de paramètre p.

B) la loi binomiale de paramètres n et p.

C) la loi géométrique de paramètre p.

D) la loi de Poisson de paramètre np.

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k, on pose : $F_n(k) = \mathbf{P}(Y_n \leqslant k)$.

32) Pour tout entier naturel k et pour tout entier $n \geqslant k$, le nombre $F_n(k)$ peut s'écrire :

A) $\mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{k} \frac{(np)^i}{i\,!}$.

B) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

C) $1 - (1 - np)^k$.

D) $p(k+1)$.

33) On montre que :

A) pour tout entier naturel k, la suite $(F_n(k))_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers 1.

B) pour tout entier naturel n, la suite $(F_n(k))_{k\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0.

C) pour tout entier naturel k, la série (d'indice n) $\sum nF_n(k)$ converge.

D) pour tout entier naturel n, la série (d'indice k) $\sum kF_n(k)$ converge.

Pour tout entier k, on pose : $N_k = \text{card}\,\{Y_n \mid 0 \leqslant Y_n \leqslant k\}$. La variable aléatoire N_k représente ainsi le nombre de variables aléatoires Y_n dont la valeur appartient à $\{0, \ldots, k\}$. On pourra utiliser par la suite le fait que $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite positive et croissante.

34) Pour tout entier naturel k et tout entier $n \geqslant 1$, on a :

A) $0 \leqslant Y_{n-1} \leqslant k \iff n \leqslant N_k$.

B) $\forall i \in \{0, \ldots n\}\ k+1 \leqslant Y_i \iff k+1 \leqslant Y_n$.

C) $\mathbf{P}(N_k = n) = F_{n-1}(k) - F_n(k)$.

D) $\mathbf{P}(N_k = n) = F_n(k) - F_{n-1}(k)$.

On admet que, pour tout entier naturel k, la variable aléatoire N_k est à valeurs entières et qu'elle admet une espérance, notée $\mathbf{E}(N_k)$.

35) Le nombre $\mathbf{E}(N_0)$ est égal à :

A) $\dfrac{1}{1-p}$.

B) $\dfrac{1}{p^2}$.

C) $\dfrac{p+1}{p}$.

D) $\dfrac{1}{p}$.

36) Pour tout entier naturel k, on établit que la série $\sum F_n(k)$ converge et qu'on a :

A) $\mathbf{E}(N_k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n(k)$.

B) $\mathbf{E}(N_k) = k + 1 + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} F_n(k)$.

C) $\mathbf{E}(N_k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} k\,(F_{n-1}(k) - F_n(k))$.

D) $\mathbf{E}(N_k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nF_n(k)$.

37) Le nombre $\mathbf{E}(N_1)$ est égal à :

A) $\dfrac{1}{2(p+1)}$.

B) $\dfrac{2}{p}$.

C) $\dfrac{1}{(1-p)^2}$.

D) $\dfrac{1}{p^2}$.

Tournez la page S.V.P.

38) Pour x dans $]-1\,;1[$, et α réel, on a :

A) $(1-x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$.

B) $(1-x)^\alpha = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\frac{x^n}{n!}$.

C) $(1-x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$.

D) $(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$.

39) Du développement en série entière précédent, on peut déduire que, pour tout x dans $]-1\,;1[$ et tout entier naturel k, on a :

A) $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1+x}{(x-1)^k}$.

B) $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1+x}{(1-x)^k}$.

C) $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

D) $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{x(1+x)^k}$.

40) On montre finalement que :

A) pour tout entier naturel k, on a : $\mathbf{E}(\mathrm{N}_{k+1}) - \mathbf{E}(\mathrm{N}_k) = \frac{1}{p^2}$.

B) $(\mathbf{E}(\mathrm{N}_k))_{k\geqslant 0}$ est la suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{p}$ et de raison $\frac{1}{p}$.

C) pour tout entier naturel k, on a : $\mathbf{E}(\mathrm{N}_k) = \frac{k+1}{2-p}$.

D) pour tout entier naturel k, on a : $\mathbf{E}(\mathrm{N}_k) = \frac{1+kp}{p^2}$.