ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2017**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve obligatoire à option

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

◆

Cette épreuve comporte :

1 page de garde
1 page d'instructions recto/verso pour remplir le QCM (à lire très attentivement)
1 page d'avertissements
12 pages de texte recto/verso

TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ICNA 2017**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire à option de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

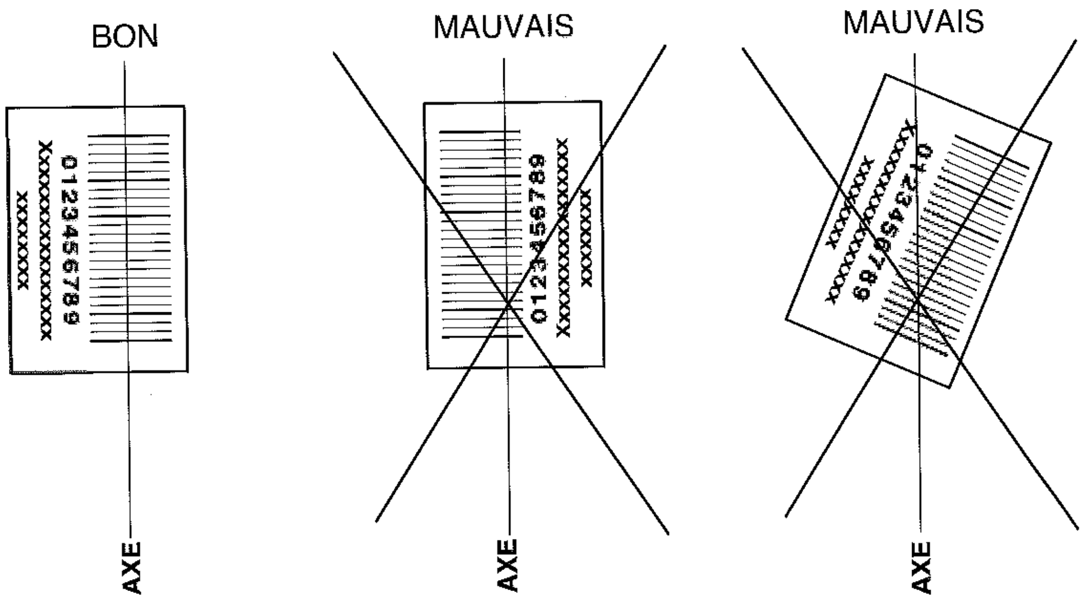
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire à option de mathématiques ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

<u>EXEMPLES</u> :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.

Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes.

Tournez la page S.V.P.

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ICNA 2017**

A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement****.*

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

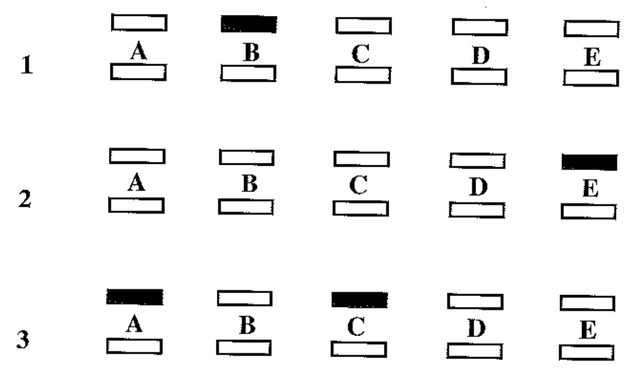
<u>EXEMPLES DE RÉPONSES</u>

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENTS

Questions liées :

Partie I
1 à 14

Partie II
15 à 26

Partie III
27 à 34

Partie IV
35 à 40

Première partie

1. Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on note $\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)$ son polynôme caractéristique.

A) Il est nécessaire que χ_A soit scindé pour que A soit diagonalisable.

B) Il suffit que χ_A soit scindé pour que A soit diagonalisable.

C) Il suffit que χ_A soit scindé à racines simples pour que A soit diagonalisable.

D) Il est nécessaire que χ_A soit scindé à racines simples pour que A soit diagonalisable.

2. Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ (carrée à coefficients réels) :

A) La trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres réelles.

B) Le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres réelles.

C) La matrice A est toujours diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

D) $\chi_A(0) = \det(A)$.

On dira qu'une matrice $A = (a_{i\,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est à dire si le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i\,i})$.

3. On donne les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Parmi ces matrices, sont à diagonale propre les matrices :

A) A_1, A_2 et A_3.

B) A_1 et A_3.

C) A_2 et A_3.

D) A_1 et A_2.

Soit α un réel et la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.

4. $\chi_M(X) = \det(X.I_n - M)$, on a :

A) $\chi_M(X) = (1-X)(2-X)(2-\alpha-X)$.

B) $\chi_M(X) = (X-1)(X-2)(X-(2-\alpha))$.

C) $\chi_M(X) = (X-2)(2-\alpha-X)^2$.

D) $\chi_M(X) = (X-1)(X-3)(X-1-\alpha)$.

5. La matrice M est diagonalisable si et seulement si :

A) $\alpha \neq 1$.

B) $\alpha \notin \{0,1\}$.

C) $\alpha = 1$.

D) $\alpha \in \{0,1\}$.

6. On a :

A) Pour tout α réel, la matrice M est une matrice à diagonale propre.

B) La matrice M est une matrice à diagonale propre pour $\alpha \notin \{0,1\}$.

C) La matrice M est une matrice à diagonale propre pour $\alpha \in \{0,1\}$.

D) La matrice M n'est jamais une matrice à diagonale propre.

7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A) Cette matrice antisymétrique A est une matrice à diagonale propre.

B) Cette matrice antisymétrique A n'est pas une matrice à diagonale propre.

C) Cette matrice A n'est pas une matrice antisymétrique.

D) Cette matrice A est diagonalisable.

8. On notera E_2 l'ensemble des matrices de $M_2(R)$ à diagonale propre.

A) E_2 est une partie fermée de $M_2(R)$.

B) E_2 est une partie ouverte de $M_2(R)$.

C) E_2 est une partie compacte de $M_2(R)$.

D) E_2 contient les matrices triangulaires de $M_2(R)$.

9. On a:

A) Toute matrice à diagonale propre est inversible.

B) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible est que tous les termes de la diagonale soient non nuls.

C) Il existe des matrices à diagonale propre inversibles dont l'inverse est encore à diagonale propre.

D) Il est impossible qu'une matrice inversible A ainsi que la matrice A^{-1} soient toutes les deux à diagonale propre.

10. On a :

A) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{R})$ par blocs (les matrices A, B, C et D étant des matrices carrées), $\det M = (\det A)(\det D) - (\det C)(\det B)$.

B) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{R})$ par blocs (les matrices A, B et D étant des matrices carrées), $\det M = (\det A)(\det D)$.

C) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice à diagonale propre de $\mathrm{M}_4(\mathrm{R})$.

D) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice à diagonale propre de $\mathrm{M}_4(\mathrm{R})$.

11. Pour une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{R})$:

A) Une matrice trigonalisable est une matrice à diagonale propre.

B) Une matrice triangulaire est une matrice à diagonale propre.

C) Une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

D) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit semblable à une matrice à diagonale propre est que cette matrice soit diagonalisable.

Tournez la page S.V.P.

12. On a :

A) Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.

B) L'ensemble des matrices à diagonale propre de $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

C) Si A est une matrice à diagonale propre, pour tout couple (a, b) de réels, la matrice $a\,A + b\,I_n$ est encore une matrice à diagonale propre.

D) Si A est une matrice à diagonale propre sa transposée n'est pas une matrice à diagonale propre.

13. Soit $A = (a_{i\,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

A) $\mathrm{trace}({}^t A\,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}$.

B) On suppose que A est symétrique réelle dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2$.

C) La seule matrice symétrique réelle à diagonale propre est la matrice nulle.

D) L'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre est l'ensemble des matrices diagonales.

14. Soit A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$, à diagonale propre.

A) $A^n = 0$.

B) ${}^t A . A$ n'est pas diagonalisable.

C) La seule matrice antisymétrique réelle à diagonale propre est la matrice nulle.

D) L'ensemble des matrices antisymétriques réelles à diagonale propre est l'ensemble des matrices diagonales.

Deuxième partie

Dans toute cette partie :
$(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombre réels telle que la série entière $\sum a_n\, x^n$ de la variable réelle x ait pour **rayon de convergence 1**.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par : $f(x)=\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\, x^n$.
On désigne par (P_1) et (P_2) les deux propriétés suivantes possibles de la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$:
(P_1) : la série $\sum a_n$ converge.
(P_2) : la fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

15. On a :

A) La série $\sum a_n\, x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$.

B) La fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$.

C) La fonction f est de classe C^∞ sur tout segment inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

D) On peut intégrer terme à terme la fonction f sur l'intervalle $]-1,1[$.

16. Dans cette question uniquement, $n\geq 1$ et $\boxed{a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}}$

A) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie (P_1) et (P_2).

B) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie (P_1) et ne vérifie pas (P_2).

C) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ne vérifie pas (P_1).

D) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=-\ln 2$.

17. Dans cette question uniquement $\boxed{a_n=(-1)^n}$

A) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie ni (P_1) ni (P_2).

B) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas (P_1) et vérifie (P_2).

C) Pour tout réel $x\in\,]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n=\frac{1}{1-x}$.

D) Pour tout réel $x\in\,]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n=\frac{1}{1+x}$.

18. On a, en général :

A) La suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ vérifie (P_1) ou vérifie (P_2).

B) Pour que la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ vérifie (P_2), il est nécessaire qu'elle vérifie (P_1).

C) Pour que la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ vérifie (P_1), il suffit qu'elle vérifie (P_2).

D) Les propriétés (P_1) et (P_2) sont équivalentes.

19. On suppose que $n_0 = 0$ et que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

A) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_1).

B) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_2) et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

C) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas (P_2) .

D) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_2) et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

20. Dans cette question, $n \geq 2$ et $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}}$

A) Pour tout réel $x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \ln(1+x) - x$.

B)Pour tout réel $x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x) - x$.

C) La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ vérifie (P_1) et (P_2).

D) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \ln 4$.

21. On a :

A) $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$.

B) $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$.

C) $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

D) La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas (P_2).

22. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

A) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_1).

B) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_2).

C) La série $\sum a_n$ diverge.

D) La série $\sum a_n$ n'est pas nécessairement divergente.

23. On a :

A) Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

B) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est une série convergente.

C) Le produit de Cauchy de deux séries n'est pas une série.

D) Le produit de Cauchy de deux séries non absolument convergentes est une série divergente.

24. On suppose que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifient (P_1) et (P_2).

On pose pour $x \in \left]-1,1\right[$, $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n$, $V(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\, x^n$ et $W(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$ avec $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ et on admet que $\lim\limits_{x\to 1^-} U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\lim\limits_{x\to 1^-} V(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} W(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$. On a :

A) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$.

B) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

C) $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

D) Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $U(x)V(x) = W(x)$.

25. On suppose que pour tout entier n : $a_n \geq 0$ et on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ on a :

A) La suite (S_n) converge.

B) La suite (S_n) est croissante.

C) La suite (S_n) est majorée.

D) Si la série $\sum a_n$ converge, la suite (S_n) est majorée par $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

26. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_2) et pour tout entier n : $a_n \geq 0$.

A) $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k = f(x)$.

B) $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k = f(x)$.

C) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{x \to 1^-} f(x)$.

D) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_1).

Troisième partie

27. On pose $I =]0, +\infty[$. On a :

A) Une fonction f est intégrable sur l'intervalle I si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

B) Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors la fonction f est intégrable sur l'intervalle I.

C) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

28. Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,t)$.

A) Pour $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $S_n(t) = n+1$.

B) Pour $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $S_n(t) = \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

C) Pour $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $S_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$.

D) Pour $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $S_n(t) = \dfrac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$.

29. On pose $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$ et on a :

A) $I_n = \pi$.

B) $I_n = \frac{\pi}{2}$.

C) $I_n = 2\pi$.

D) $I_n = \frac{1+\pi}{2}$.

30. On définit une fonction f sur $[0,\pi]$ par :

$$f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \quad \text{si } 0 < t \leq \pi \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

A) Pour $t \in]0,\pi]$, $f(t) = \dfrac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin(\frac{t}{2})} = \dfrac{\frac{t^3}{12} + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} \sim \dfrac{t}{12}$ (au voisinage de 0)

ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$ et f est continue en 0.

B) $\lim\limits_{t\to 0} f'(t)$ existe et vaut $\frac{1}{24}$.

C) La fonction f n'est pas dérivable en 0.

D) La fonction f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

31. Soit une fonction f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on a :

A) $\int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t.$

B) $\int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t.$

C) $\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)dt\right| \leq \frac{2}{2n+1}\sup\limits_{[0,\pi]}|f'(t)|.$

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = 0.$

Tournez la page S.V.P.

32. On a :

A) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

B) Pour $x>0$ l'égalité suivante : $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$

C) Pour $x>0$ l'égalité suivante : $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$

D) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

33. Le changement de variable $u=(n+\frac{1}{2})t$ donne

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$ et on arrive à :

A) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$

B) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$

C) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \pi.$

D) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 2\pi.$

34. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

A) Pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2.$

B) Pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \pi.$

C) Pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

D) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Quatrième partie

35. On note G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

On note R le rayon de convergence de la série entière définissant G_X.

A) $R = 1$.

B) $R < 1$.

C) $R > 1$.

D) $G_X''(0) = 2P(X = 2)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans N. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie pour tout couple d'entiers naturels (i,j) : $P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{\alpha}{i!.j!}$.

36. On a :

A) $\alpha = 2$.

B) $\alpha = e^2$.

C) $\alpha = e^{-2}$.

D) $\alpha = \frac{2}{e}$.

37. On a :

A) X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

B) X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = e$.

C) L'espérance de Y est 1.

D) La variance de $X + Y$ est 2.

38. On a :

A) $P(X = Y) = e^{-1}$.

B) $P(X = Y) = e^{-2}$.

C) $P(X = Y) = 1$.

D) $P(X = Y) = \frac{e}{8}$.

Tournez la page S.V.P.

39. On a :

A) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

B) X et Y sont deux variables aléatoires non indépendantes.

C) La covariance des variables X et Y est nulle.

D) La covariance des variables X et Y est non nulle.

40. On note G_Z la fonction génératrice de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

A) Pour tout réel t, $G_Z(t) = e^{(t-1)}$.

B) Pour tout réel t, $G_Z(t) = e^{2(t-1)}$.

C) Pour tout réel t, $G_Z(t) = G_X(t) + G_Y(t)$.

D) La fonction G_Z est de classe C^1 sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$.