ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2017**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve obligatoire de

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Cette épreuve comporte :

1 page de garde
1 page d'instructions recto/verso pour remplir le QCM *(à lire très attentivement)*
9 pages de texte recto/verso

TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ICNA 2017

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

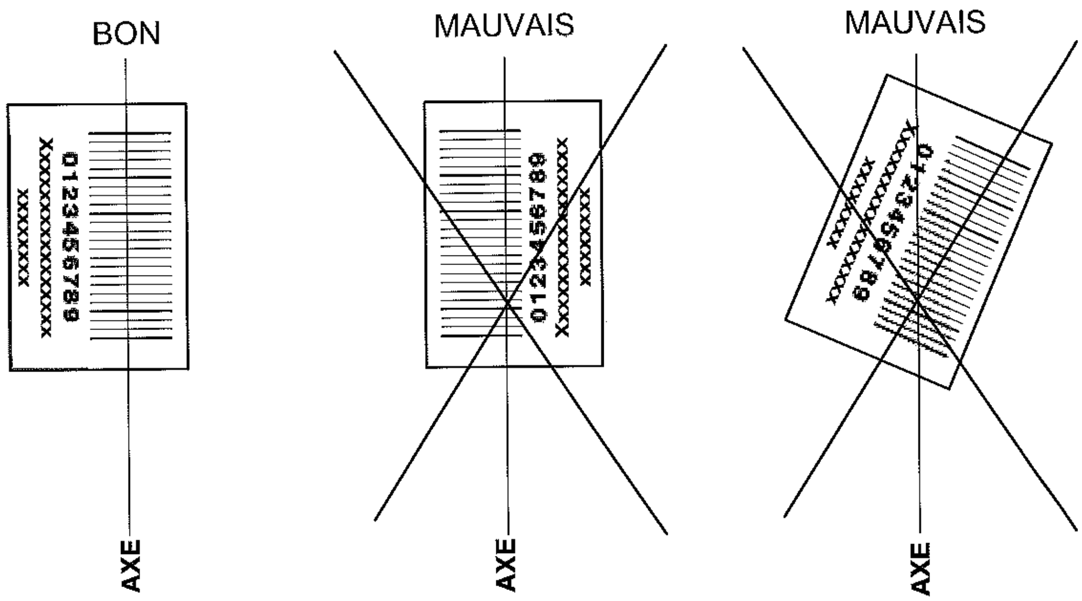
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire de mathématiques ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement****.*

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

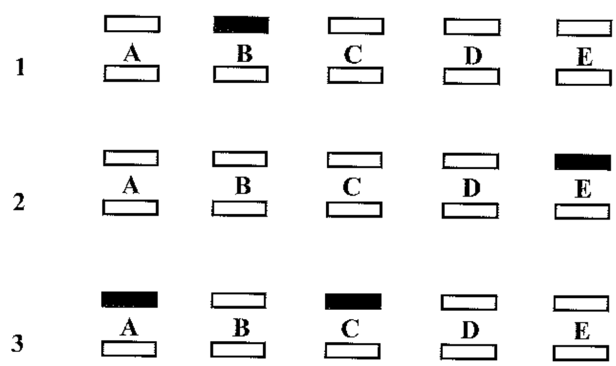
<u>EXEMPLES DE RÉPONSES</u> :

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Département Admissions et
Vie des Campus

Toulouse, le 13 avril 2017

DE : My-Ngoc SENGTHAVISOUK	Tél .: +33 (0) 5 62 17 41 83	Fax : +33 (0) 5 62 17 40 79
A : TOUS LES CHEFS DE CENTRE		

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 1

ICNA 2017

ERRATA

POUR L'ÉPREUVE DE Mathématiques

Page 7, question 24, réponse B)

Au lieu de : x (petit x)

Lire : X (grand x)

ENAC
ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Département Admissions et
Vie des Campus

Toulouse, le 13 avril 2017

DE : My-Ngoc SENGTHAVISOUK	**Tél .:** +33 (0) 5 62 17 41 83	**Fax :** +33 (0) 5 62 17 40 79
A : TOUS LES CHEFS DE CENTRE		

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 1

ICNA 2017

ERRATA

POUR L'ÉPREUVE DE Mathématiques

Page 7, question 27

Dans la deuxième ligne de la question 27, il manque **< 1**

Au lieu de : $-1 < X1 < X2 < \ldots < Xk-1$

Lire : $-1 < X1 < X2 < \ldots < Xk-1 < 1$

7, avenue Edouard Belin - BP 54005 - 31055 Toulouse Cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00 - Fax + 33 (0) 5 62 17 40 23
www.enac.fr

PARTIE 1

Les questions de 1 à 7 sont indépendantes entre elles.
Dans les questions 1,2,3, on considère un dé ayant une forme de tétraèdre régulier bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Question 1 On lance le dé et on repère le numéro de la face cachée.

A) L'univers est équiprobable .

B) L'univers est le dé .

C) L'univers est $\mathbb{N}^*$.

D) L'univers est $\{1;2;3;4\}$.

Question 2 Si on lance deux dés alors :

A) L'univers est l'ensemble $[1;4]$.

B) L'univers est l'ensemble $\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4\}$.

C) L'univers est l'ensemble $\{1;2;3;4\}$.

D) L'univers est l'ensemble $[1;4]^2$.

Question 3 On lance un dé sur une table en verre. On note le numéro indiqué sur la face en contact avec la table. On définit une probabilité p sur l'ensemble des résultats de la façon suivante : $\forall k \in \{1;2;3;4\}$, $p(k)$ est proportionnelle à k.

A) La probabilité d'obtenir 2 est 1/2.

B) La probabilité d'obtenir 4 est 2/5 .

C) La probabilité d'obtenir 1 est 1/4 .

D) Les évènements "obtenir 2" et " obtenir 4" sont indépendants.

Question 4 Si A et B sont deux évènements d'un espace même probabilisé Ω alors :

A) On a toujours : $p(A \bigcap B) = p(A)p(B)$.

B) Il existe un évènement A indépendant de lui même.

C) On a toujours : $p(A \bigcap \overline{B}) - p(A)p(\overline{B}) = p(\overline{A})p(B) - p(\overline{A} \bigcap B)$.

D) Si A et B sont indépendants alors $p(A \bigcup B) = p(A) + p(B)$.

Question 5 On se place dans $\mathbb{N}^*$.Un nombre est dit symétrique si son écriture décimale présente une symétrie. Ainsi les nombres 1221 et 1423241 sont des nombres symétriques. Cette question ne concerne que les nombres symétriques **ne se terminant pas** par 0.

A) Il y a 9 nombres symétriques de deux chiffres.

B) Il y a 9^2 nombres symétriques de quatre chiffres.

C) Il y a 50 nombres symétriques de cinq chiffres qui sont tous des chiffres pairs.

D) Il y a 9^3 nombres symétriques de six chiffres.

Question 6 Deux joueurs A et B jouent avec deux dés cubiques bien équilibrés. Ils lancent les dés et s'intéressent à la somme des nombres affichés sur la face supérieure.
A gagnera si la somme est 7 et B si la somme est 6 .
A et B jouent alternativement , B joue le premier. Le jeu s'arrête dès que l'un d'eux gagne.

A) Les évènements " A gagne " et "B gagne" sont équiprobables.

B) La probabilité que A gagne à son troisième lancer est $(\frac{6}{36})^2(\frac{5}{36})^3$

C) La probabilité que "A gagne" est $\dfrac{30}{61}$.

D) La probabilité que "B gagne" est $\dfrac{30}{61}$.

Question 7 Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. On s'intéresse à la probabilité que le numéro tiré soit divisible par 3 ou 4. Pour tout réel x ,on note $[x]$ la partie entière de x.

A) La probabilité que le numéro tiré soit divisible par 3 est $\frac{1}{3}$.

B) La probabilité que le numéro tiré soit divisible par 3 est $\frac{[n/3]}{n}$.

C) La probabilité que le numéro tiré soit divisible par 3 ou par 4 est $\frac{1}{2}$.

D) La limite quand n tend vers l'infini de la probabilité que le numéro tiré soit divisible par 3 ou par 4 est $\frac{1}{2}$.

La vie de Médor.

Considérons dans $E = \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice A qui représente dans la base canonique l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.95 & 0 & 0.05 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Question 8 **A)** 1 est valeur propre de la matrice A.

B) Le polynôme caractéristique de f admet une seule racine réelle.

C) Chaque espace propre de A est de dimension 1.

D) La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice diagonale.

Question 9 **A)** A est inversible.

B) Si A est inversible, alors les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

C) En général, si une matrice B est inversible, alors elle a les mêmes espaces propres et les mêmes valeurs propres que B^{-1}.

D) 0 n'est pas valeur propre de A donc A est diagonalisable.

Question 10 **A)** La matrice A est semblable à une matrice D de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. α étant un nombre réel.

B) Il existe une matrice P inversible telle que : $D = PAP^{-1}$.

C) Une base de vecteurs propres est : $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -79 \\ -16 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}$.

D) La somme des termes de chaque ligne valant 1, c'est aussi la somme des valeurs propres.

Question 11 Considérons la matrice $B = 100A$.

A) A est diagonalisable équivaut à B est diagonalisable.

B) Si λ est valeur propre de B alors 100λ est valeur propre de A .

C) Les espaces propres de A sont distincts de ceux de B.

D) Si $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -32 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B, alors $\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.02 \\ -0.32 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

Pour la suite, on considère le comportement du petit chien Médor.Celui ci a trois activités principales :

Ma : Manger

Pr : Se promener

Do : Dormir

Après avoir observé le comportement du chien . Il est possible de synthétiser son comportement de la façon suivante.Chaque activité lui est proposée à intervalles de temps réguliers.

- La probabilité que Médor mange sachant qu'il vient de manger est 0.9.
- La probabilité que Médor mange sachant qu'il vient de se promener est 0.05.
- La probabilité que Médor mange sachant qu'il vient de dormir est 0.05.
- La probabilité que Médor dorme sachant qu'il vient de se promener est 0.
- La probabilité que Médor dorme sachant qu'il vient de dormir est 0.2.
- La probabilité que Médor dorme sachant qu'il vient de manger est 0.8.
- La probabilité que Médor se promène sachant qu'il vient de dormir est 0.05.
- La probabilité que Médor se promène sachant qu'il vient de manger est 0.95.
- La probabilité que Médor se promène sachant qu'il vient de se promener est 0.

On numérote les activités successives dans le temps en commençant à $n = 1$ qui correspond au temps 1. La première activité (temps 1)est : se promener. On définit les événements suivants au temps n , ($n \in \mathbb{N}$) :

$(Ma)_n$ à l'activité n le chien mange.

$(Pr)_n$ à l'activité n le chien se promène.

$(Do)_n$ à l'activité n le chien dort.

On notera X_n le vecteur : $X_n = \begin{pmatrix} p((Ma)_n) \\ p((Pr)_n) \\ p((Do)_n) \end{pmatrix}$

Tournez la page S.V.P.

Question 12 **A)** $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

B) $p((Ma)_{n+1}) = 0.9p((Ma)_n) + 0.05p((Pr)_n) + 0.05p((Do)_n)$.

C) $p((Ma)_{n+1}) = p((Ma)_n) + p((Pr)_n) + p((Do)_n)$.

D) $p((Pr)_{n+1}) = 0.05p((Ma)_n) + 0.95p((Do)_n)$.

Question 13 A désignant la matrice précédemment définie.

A) $X_2 = A^2 X_1$.

B) $X_n = A^n X_1$.

C) $X_{n+1} = A^n X_1$.

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X_n = p((Ma)_n)$.

Question 14 **A)** Les trois suites ayant respectivement pour terme général $p((Ma)_n)$; $p((Pr)_n)$; $p((Do)_n)$. convergent vers la même limite.

B) La limite de la suite de terme général $p((Ma)_n)$ dépend du type de la première activité.

C) La limite de la suite de terme général $p((Pr)_n)$ est $\frac{1}{3}$.

D) La limite du vecteur X_n est le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 79 \\ 1 & -16 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 79 \\ 1 & -16 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ espace euclidien muni du produit scalaire canonique.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Question 15 **A)** $rg(A) < 3$.

B) $rg(A) + dimKerA = 3$.

C) $detA$ est non nul.

D) Si on nomme C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice A,alors :
A est semblable à la matrice B dont les colonnes sont $C_1 - C_2, C_2 - C_3, C_3$.

Question 16 **A)** Il peut exister une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que :$A = QDQ$.

B) Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :$A = P^{-1}DP$.
P étant la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

C) Si A' est la matrice de f dans la base $(-e_1; -e_2; -e_3)$ alors $detA = -detA'$

D) Si A' est la matrice de f dans la base $(e_1; e_2 + e_1; e_1 + e_3)$ alors A diagonalisable équivaut à A' diagonalisable.

Question 17 **A)** Imf et $Kerf$ sont supplémentaires.

B) Imf et $Kerf$ ne sont pas supplémentaires orthogonaux.

C) L'orthogonal de $kerf$ est strictement inclus dans Imf.

D) $kerf$ et Imf sont stables par f.

Question 18 De manière générale :

A) Si une matrice B est diagonalisable alors la matrice $3B$ est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres.

B) Si les matrices de $M_3(\mathbb{R})$, B et C sont diagonalisables, alors
la matrice $B - C$ est toujours diagonalisable .

C) Si k est une valeur propre de B alors k^n est une valeur propre de B^n

D) Les matrices B et $3B$ ont les mêmes espaces propres.

Question 19 Soit M une matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ (avec $n > p$) et ${}^tM$ sa transposée .
De manière générale :

A) $M.{}^tM = {}^tM.M$.

B) Si $M.{}^tM$ est inversible alors ${}^tM.M$ est aussi inversible.

C) $M.{}^tM$ est toujours diagonalisable.

D) M, $M.{}^tM$ et ${}^tM.M$ ont le même noyau.

PARTIE 3.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés liées à l'intégration ou à la dérivation de la fonction polynômiale : $x \to (x^2-1)^n$.

Propriétés liées à l'intégration

Dans un premier temps, on cherche l'expression générale de l'intégrale : $J_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Question 20 En intégrant $J = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1}dx$ on obtient :

A) $J = (2n+1)J_n$

B) $J = 2nJ_n$

C) $J = \dfrac{1}{2n+1}J_n$

D) Pour n non nul, $J = \dfrac{1}{2n}J_n$

Question 21 En calculant ensuite la différence $J_{n-1} - J_n$ pour n non nul, on obtient la relation de récurrence suivante.

A) $J_n = \dfrac{2n-1}{2n}J_{n-1}$.

B) $J_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}J_{n-1}$.

C) $J_n = \dfrac{2n}{2n+1}J_{n-1}$.

D) $J_n = \dfrac{2n}{2n-1}J_{n-1}$.

Question 22 On obtient pour $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$:

A) $I_n = (-1)^n 2^{(2n+1)} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

B) $I_n = (-1)^n 2^{(2n)} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

C) $I_n = (-1)^n 2^{(2n+1)} \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

D) $I_n = (-1)^n 2^{(2n)} \dfrac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$

Propriétés liées à la dérivation

Question 23 On définit dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n$. Avec les conventions habituelles, on prendra $L_0 = 1$.
On peut alors dire que :

A) Le terme dominant de L_n est $\dfrac{(2n+1)!}{((n+1)!)}X^{n+1}$.

B) L_n est toujours un polynôme pair.

C) L_n a la même parité que $n+1$.

D) L_n a la même parité que n.

Question 24 A partir de la définition de L_n, on peut écrire :

A) $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

B) $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(x+1)^n$

C) $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

D) $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

On en déduit alors que pour tout entier naturel n :

Question 25 **A)** $L_n(1) = L_n(-1)$

B) $L_n(1) = 0$

C) $L_n(1) = n!$

D) $L_n(1) = 2^n n!$

Question 26 On pose $P_n^{(k)} = \frac{d^k}{dX^k}P_n$.En calculant $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$, on constate que :

A) $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$ n'ont pas de racines autres que 1 et -1 dans $[-1,1]$.

B) $P_n^{(1)}$ a une racine dans $]-1,1[$ et $P_n^{(2)}$ n'a pas de racines dans $]-1,1[$.

C) $P_n^{(2)}$ a une racine double dans $]-1,1[$.

D) $P_n^{(2)}$ a deux racines symétriques dans $]-1,1[$.

Question 27 On suppose que pour $k > 2$, $P_n^{(k-1)}$ admet $k-1$ racines X_i telles que :

$$-1 < X_1 < X_2 < ... < X_{k-1}$$

A) L'hypothèse est impossible car les seules racines de $P_n^{(k-1)}$ sont 1 et -1.

B) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors $k+1$ fois dans $[-1,1]$

C) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors $k-1$ fois dans $]-1,1[$

D) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors k fois dans $]-1,1[$

Question 28 On peut donc en déduire que :

A) Pour tout n, $L_n(1) = L_n(-1)$.

B) L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont simples toutes dans $]-1,1[$.

C) Si n est impair, alors les racines de L_n sont symétriques.

D) Si n est pair, alors L_n admet 0 comme racine.

Question 29 En calculant $P_{n+1}^{(1)}$ et $P_{n+1}^{(2)}$, pour n non nul, on obtient la relation :

A) $P_{n+1}^{(2)} = 2(2n+1)^2 P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$.

B) $P_{n+1}^{(2)} = (n+1)^2 P_{n-1} + 4n(n+1)P_n$.

C) $P_{n+1}^{(2)} = 2(2n+1)(n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$.

D) $P_{n+1}^{(2)} = (2n-1)(n+1)P_n - 4n(n+1)P_{n-1}$.

Question 30 En dérivant n fois $P_{n+1}^{(1)}$, on obtient pour n non nul :

A) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)X^2 P_n^{(n-1)}$.

B) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)(n-1)^2 P_n^{(n-1)}$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$.

D) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n-1)(n+1)P_n^{(n-1)}$.

Question 31 En dérivant $n-1$ fois l'expression de $P_{n+1}^{(2)}$ obtenue précédemment, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$:

A) $L_{n+1} = 2(2n+1)^2 P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$.

B) $L_{n+1} = (n+1)^2 P_{n-1}^{(n-1)} + 4n(n+1)L_n$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$.

D) $L_{n+1} = (n+1)(2n-1)P_n^{(n-1)} - 4n(n+1)L_{n-1}$.

Question 32 On obtient finalement pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation permettant d'exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et de L_{n-1}.

A) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4(n-1)^2 L_{n-1}$.

B) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4n^2 L_{n-1}$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4n^2 L_{n-1}$.

D) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4(n-1)^2 L_{n-1}$.

Question 33 La relation exprimant L_{n+1} en fonction de L_n et de L_{n-1} permet ainsi de calculer les différents polynômes L_n .Ainsi on obtient pour L_4 l'expression suivante.

A) $L_4 = 35(48X^4 - 30X^2 + 3)$.

B) $L_4 = 42(40X^4 - 30X^2 + 3)$.

C) $L_4 = 48(35X^4 - 30X^2 + 3)$

D) $L_4 = 40(42X^4 - 30X^2 + 3)$

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ on associe à $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$< P|Q > = \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$$

Question 34 En procédant à des intégrations par parties successives on montre que pour $m < n$:

A) $< L_n|X^m > = (-1)^{k+1} m(m-1)....(m-k) \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X^2-1)^n X^{m-k} dX$.

B) $< L_n|X^m > = (-1)^{k} m(m-1)....(m-k) \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X^2-1)^n X^{m-k} dX$.

C) $< L_n|X^m > = (-1)^{m} m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m+1}}{dX^{n-m+1}}(X^2-1)^n X dX$.

D) $< L_n|X^m > = (-1)^{m-1} m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m+1}}{dX^{n-m+1}}(X^2-1)^n X dX$.

Question 35 On en déduit que pour $m < n$:

A) $< L_n|X^m > = (-1)^m m!$

B) $< L_n|X^m > = (-1)^{m-1}(m-1)!$

C) $< L_n|X^m > = (n-m)!$

D) $< L_n|X^m > = 0$

Question 36 On peut en déduire alors si m est différent de n :

A) $< L_n|L_m > = (-1)^{m+n}(m+n)!$

B) $< L_n|L_m > = (-1)^{m-1}(m-1)!$

C) Si $n > m$ alors $< L_n|L_m > = (-1)^{n-m}(n-m)!$

D) $< L_n|L_m > = 0$

On se propose de calculer $||L_n||$ à partir du calcul de $J = ||L_n||^2$.

Question 37 En intégrant n fois par parties l'intégrale J, on obtient :

A) $J = \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

B) $J = (-1)^n \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

C) $J = (-1)^n \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dX^{2n}}(X^2-1)^n dX$

D) $J = \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

Question 38 On obtient alors comme expression de $||L_n||^2$:

A) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1}$

B) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$

C) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

D) $||L_n||^2 = 1$

Question 39 On se place maintenant dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on considère la famille constituée par les polynômes L_0, L_1, L_2, L_3 et on cherche à exprimer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ sous la forme :

$$\alpha L_0 + \beta L_1 + \gamma L_2 + \delta L_3$$

A) La décomposition n'est pas unique.

B) La décomposition est unique car la famille est orthogonale.

C) La décomposition est unique si on impose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (-1)^3$

D) La décomposition est unique si on impose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

Question 40 Soit le polynôme $Q = X^3 - 1$ on peut écrire Q sous la forme :

A) $Q = \dfrac{1}{2}L_0 + \dfrac{3}{2}L_1 - \dfrac{3}{2}L_2 + \dfrac{1}{2}L_3.$

B) $Q = \dfrac{1}{2}L_0 + \dfrac{3}{2}L_1 - \dfrac{3}{2}L_2 - \dfrac{1}{2}L_3.$

C) $Q = L_0 + \dfrac{3}{2}L_1 + \dfrac{3}{2}L_2 + 2L_3.$

D) $Q = -L_0 + \dfrac{3}{10}L_1 + \dfrac{1}{120}L_3.$