

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2016

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



*Épreuve obligatoire à option*

**MATHÉMATIQUES**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde
- 2 pages d'instructions recto/verso pour remplir le QCM (à lire très attentivement)
- 1 page d'avertissements
- 10 pages de texte recto/verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE MATHÉMATIQUES

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

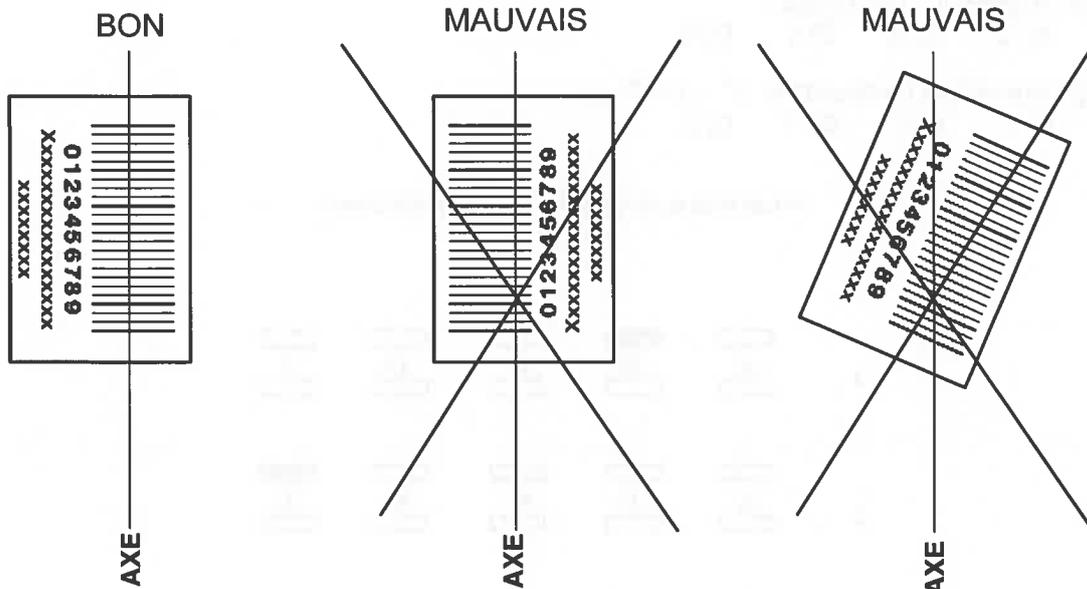
L'épreuve obligatoire à option de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

## ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

- 1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez, c'est-à-dire « épreuve obligatoire à option de mathématiques ».

## POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification à **gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

EXEMPLES :

- 2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.
- 3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.
- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.

**Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes.**

**Tournez la page S.V.P.**

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, la ligne correspondante doit rester vierge.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : vous devez noircir deux des cases A, B, C, D **et deux seulement**.
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : vous devez alors noircir la case E.

**Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

**EXEMPLES DE RÉPONSES**

Question 1 :  $1^2 + 2^2$  vaut :  
A) 3    B) 5    C) 4    D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :  
A) -3    B) -1    C) 4    D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation  $x^2 - 1 = 0$  est :  
A) 1    B) 0    C) -1    D) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**

1	<input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/>

## AVERTISSEMENTS

**L'usage de calculatrices, de téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé.**

### Questions liées :

Partie I  
1 à 13

Partie II  
14 à 28

Partie III  
29 à 40

## PARTIE I

On appelle **lois algébriques usuelles** l'addition des fonctions, notée « + », la multiplication des fonctions, notée « × », et la multiplication des fonctions par un scalaire réel, notée « · ». Pour  $n$  entier naturel, on note  $C_n$  l'ensemble des fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0, 1]$ . Si  $h$  est une fonction deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ , on note  $h''$  sa fonction dérivée seconde. On note  $P_n$  l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  et définies sur  $[0, 1]$ . On pose  $F_n = \{f \in C_n, f(0) = f(1) = 0\}$ .

- 1) Muni des lois algébriques usuelles suivantes,
- A)  $(C_n, +, \times)$  est un anneau commutatif
  - B)  $P_n$  est un sous-anneau de  $(C_n, +, \times)$
  - C)  $P_n$  est un idéal de  $(C_n, +, \times)$
  - D)  $(C_n, +, \cdot)$  est un espace vectoriel de dimension finie
- 2) Muni des lois  $+$  et  $\cdot$ , l'ensemble  $F_2 \cap P_2$
- A) est réduit à la fonction nulle
  - B) est un espace vectoriel engendré par les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto x^2$
  - C) est un espace vectoriel de dimension 1
  - D) n'est pas un sous-espace vectoriel de  $C_2$
- 3) L'application  $h \mapsto h''$  définit
- A) un endomorphisme de l'espace vectoriel  $P_n$
  - B) une bijection de  $C_n$  sur  $C_n$
  - C) une injection de  $F_2$  dans  $C_0$
  - D) un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $P_4$  sur  $P_2$

Pour tout réel  $x$  strictement positif, on note  $\chi_x$  la fonction qui, à tout réel  $t$ , associe la valeur 1 si  $t$  est dans l'intervalle  $[-x, x]$  et 0 sinon.  
 $f$  étant élément de  $C_0$ , on pose  $I(x) = \int_0^1 f(t)\chi_x(t) dt$  si  $x > 0$  et  $I(0) = 0$ .

- 4) On suppose dans cette question que  $f(t) = t$  pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ . Pour tout réel  $x > 0$ ,
- A)  $I(x) = \int_{-x}^x t dt$
  - B)  $I(x) = \int_0^x t dt$
  - C)  $I(x) = \frac{x^2}{2}$
  - D)  $I(x)$  ne dépend pas de  $x$

- 5) On retourne au cas général où  $f$  est un élément quelconque de  $C_0$ . La restriction de la fonction  $I$  à  $[0, 1]$
- A) appartient à  $C_0$
  - B) est dérivable et a pour dérivée  $f$
  - C) appartient à  $C_2$
  - D) appartient à  $P_2$  si  $f$  appartient à  $P_2$ .

Soit  $f$  dans  $C_0$ .

Dans toute la suite, on pose, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ ,  $g(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t| f(t) dt$ .

- 6) On suppose dans cette question que  $f(t) = t$  pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ .

Alors  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  est égal à

- A)  $\frac{1}{24}$
- B)  $\frac{1}{12}$
- C)  $\frac{1}{16}$
- D) 0

- 7) Pour cette question et les suivantes (jusqu'à la question 10), on revient au cas général où  $f$  est un élément quelconque de  $C_0$ . Pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ ,

A)  $g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (t - x) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (x - t) f(t) dt$ .

B)  $g(x) = \frac{1}{2} \left[ x \left( \int_0^x f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right) - \left( \int_0^x t f(t) dt + \int_1^x t f(t) dt \right) \right]$

C)  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x \int_1^0 f(t) dt + \int_x^0 t f(t) dt + \int_1^x t f(t) dt \right)$

D)  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt \right)$

- 8) La fonction  $g$  appartient à  $C_2$  et, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ ,

A)  $g''(x) = 1$

B)  $g''(x) = f(x)$

C)  $g''(x) = 0$

D)  $g''(x) = -f(x)$

- 9) L'équation différentielle  $y'' = f$ , d'inconnue  $y$  dans  $F_2$ , a pour ensemble de solutions

A)  $\{x \mapsto g(x) + (g(0) - g(1))x - g(0)\}$

B)  $\{x \mapsto -g(x)\}$

C)  $\{x \mapsto g(x) + a, \quad a \in \mathbf{R}\}$

D)  $\{x \mapsto -g(x) + ax + b, \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

10) On peut déduire des questions précédentes que

- A) l'application  $h \mapsto h''$  définit une injection non surjective de  $F_2$  dans  $C_0$
- B) l'application  $h \mapsto h''$  définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $F_2$  sur  $C_0$
- C) l'application  $h \mapsto h''$  définit une surjection non injective de  $F_2$  dans  $C_0$
- D) les dimensions des espaces vectoriels  $F_2$  et  $C_0$  sont finies et égales

Dans toute la suite, on pose, pour tout entier naturel  $k$ ,  $G_k = F_k \cap P_k$  et  $\varphi : h \mapsto h''$  définie de  $G_{n+2}$  dans  $P_n$ .

11) L'ensemble  $G_{n+2}$ , muni des lois  $+$  et  $\cdot$ , est un espace vectoriel

- A) de dimension  $n + 1$
- B) dont une base est  $(x \mapsto x^k, \quad k \in \{1, \dots, n + 2\})$
- C) dont une base est  $(x \mapsto x^{k-1}, \quad k \in \{2, \dots, n + 2\})$
- D) dont une base est  $(x \mapsto x(x - 1)^k, \quad k \in \{0, \dots, n\})$

12) Pour tout entier naturel  $k \leq n$  et pour tout réel  $x$  dans  $[0, 1]$ ,

- A)  $\varphi(x^k) = k(k - 1)x^{k-2}$
- B)  $\varphi(x^{k+2} - x^{k+1}) = x^k((k + 2)x - (k + 1))$
- C)  $\varphi^{-1}(x^k) = \frac{(x - 1)}{(k + 1)(k + 2)} \sum_{i=1}^{k+1} x^i$
- D)  $\varphi^{-1}(x^k) = \frac{x^{k+2}}{(k + 1)(k + 2)}$

13) Soit  $M$  la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $(x \mapsto x^{k+1}(x - 1), \quad k \in \{0, \dots, n\})$  et  $(x \mapsto x^k, \quad k \in \{0, \dots, n\})$  de  $G_{n+2}$  et  $P_n$  respectivement. Alors

A)  $M$  n'est pas inversible

B)  $M$  est inversible et  $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix}$

C)  $M$  et  $M^{-1}$  sont diagonalisables

D)  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont diagonalisables

## PARTIE II

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. Pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , on note  ${}^tM$  la matrice transposée de  $M$ . Enfin,  $I_n$  désigne la matrice unité d'ordre  $n$ .

- 14) De manière générale, une matrice carrée à coefficients réels
- A) est diagonalisable si et seulement si ses coefficients diagonaux sont distincts deux à deux
  - B) est diagonalisable si et seulement si les racines de son polynôme caractéristique sont toutes réelles et distinctes deux à deux
  - C) est inversible si et seulement si ses valeurs propres complexes sont toutes non nulles
  - D) est inversible si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls

Pour tout réel  $a$ , on pose  $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$ .

- 15) La matrice  $M(a)$  est équivalente à la matrice

- A)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$
- B)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$
- C)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$
- D)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 3a-2 \end{pmatrix}$

- 16) Le nombre 0 est valeur propre de  $M(a)$  si et seulement si

- A)  $a = 2$
- B)  $a \neq \frac{2}{3}$
- C)  $a = 1$  ou  $a = 2$
- D)  $a \neq 0$

On pose  $C_{M(a)}(X) = \det(XI_3 - M(a))$ .

- 17) Si on écrit  $C_{M(a)}(X)$  sous la forme  $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ , alors
- A)  $a_0 = 6a - 4$
  - B)  $a_1 = 8 - 3a$
  - C)  $a_2 = 5 - a$
  - D)  $a_3 = -1$
- 18) L'écriture factorisée de  $C_{M(a)}(X)$  est
- A)  $(X - 1)^2(X - 2)$
  - B)  $(X - 1)(X - 2)^2$
  - C)  $(X - 1)(X - 2 + a)(X - 2)$
  - D)  $(X - a)(X - a + 2)(X - 2)$
- 19) La matrice  $M(a)$  est diagonalisable si et seulement si
- A)  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$
  - B)  $a \neq 0$
  - C)  $a \neq 2$
  - D)  $a \neq 1$
- 20) Plus généralement, une matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont les  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , supposées réelles, sont les éléments diagonaux de la matrice
- A) est diagonalisable
  - B) a pour déterminant le produit des  $n$  valeurs propres
  - C) est inversible
  - D) n'existe pas
- 21) On note  $A$  une matrice carrée d'ordre 3, de coefficient général complexe  $a_{ij}$ . On suppose que  $a_{11}, a_{22}$  et  $a_{33}$  sont les valeurs propres (éventuellement égales) de  $A$ . Alors
- A)  $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$
  - B) la somme  $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}$  est nulle
  - C)  $A$  est diagonale
  - D)  $A$  est diagonalisable

22) L'hypothèse de la question 21 est vérifiée par

A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

B)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D)  $\begin{pmatrix} 2i & 1 & -2i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Dans tout ce qui suit, on note  $\mathcal{D}_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  constitué des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbf{R}$  et dont les termes diagonaux sont les racines du polynôme caractéristique, comptées avec le même ordre de multiplicité.

23) Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels quelconques. Alors

- A)  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  si et seulement si  $\alpha\lambda + \beta$  est une valeur propre de  $\alpha^t M + \beta I_n$
- B)  $\alpha M + \beta I_n$  et  $\alpha^t M + \beta I_n$  ont le même polynôme caractéristique, les mêmes valeurs propres et les mêmes espaces propres
- C) si  $M$  appartient à  $\mathcal{D}_n$ , alors  $\alpha M + \beta I_n$  et  $\alpha^t M + \beta I_n$  appartiennent aussi à  $\mathcal{D}_n$
- D) si  $M$  appartient à  $\mathcal{D}_n$ , et si  $M^2 = M$ , alors  $(\alpha M + \beta I_n)^2$  appartient aussi à  $\mathcal{D}_n$

24) On note  $\mathcal{I}_n$  l'ensemble des matrices inversibles appartenant à  $\mathcal{D}_n$ . On peut affirmer que

- A) tout élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est la somme de deux éléments de  $\mathcal{D}_n$
- B)  $\mathcal{D}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
- C)  $\mathcal{I}_n$  est vide
- D)  $\mathcal{I}_n$  est dense dans  $\mathcal{D}_n$

25) Soit  $M = (m_{ij})$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . La trace de  ${}^tMM$  est égale à

A)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}m_{ji}$

B)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2$

C)  $\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2$

D)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}$

26) Soit  $S$  un élément de  $\mathcal{D}_n$ . On suppose de plus que  $S$  est symétrique. Alors

A) une telle matrice n'existe pas

B)  $S = I_n$

C)  $S$  est diagonale

D)  $S$  est la matrice nulle d'ordre  $n$

27) Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et antisymétrique. On peut affirmer que

A)  $A^n$  est antisymétrique

B)  ${}^tAA$  est diagonalisable

C) la trace de  ${}^tAA$  est nulle

D) si  $A$  appartient aussi à  $\mathcal{D}_n$ , alors  $({}^tAA)^n$  est la matrice nulle d'ordre  $n$

28) L'ensemble des matrices antisymétriques appartenant à  $\mathcal{D}_n$

A) est réduit à la matrice unité

B) est un espace vectoriel de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$

C) contient la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) est l'ensemble des matrices carrées diagonales à coefficients réels

## PARTIE III

29) Soit une série de terme général strictement positif  $b_n$ , où  $n$  est un entier naturel quelconque. Pour que cette série converge,

- A) il est suffisant que la suite de terme général  $b_n$  converge vers 0
- B) il est nécessaire que la suite de terme général  $b_n$  converge vers 0
- C) il est nécessaire et suffisant que la suite de terme général  $\sum_{k=0}^n b_k$  converge vers 0
- D) il est suffisant que la suite de terme général  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  converge et que sa limite soit strictement inférieure à 1

30) On pose, pour tout entier naturel  $n$  différent de 0,  $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ . Alors

- A) la suite  $(b_n)$  est croissante et majorée
- B) la suite  $(b_n)$  est convergente et sa limite est égale à 1
- C)  $(b_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{n}{n+1} < 1$
- D) la série de terme général  $b_n$  converge

Dans tout ce qui suit, on note  $I$  l'intervalle  $[0, 1[$ . Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on pose, pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $f_n(x) = a_n x^n (1-x)$ , où  $(a_n)$  est une suite réelle définie sur  $\mathbf{N}^*$ . Si elle existe, on note  $\|f_n\|_\infty$  la borne supérieure des nombres  $f_n(x)$  lorsque  $x$  décrit  $I$ . En cas de convergence de la série  $\sum f_n(x)$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

31) Dans le cas où  $(a_n)$  est la suite constante égale à 1,

- A)  $(f_n)$  est une suite décroissante
- B)  $(f_n)$  est une suite de fonctions décroissantes sur  $I$
- C) pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty$  existe et est égale à 1
- D) pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty$  existe et est égale à  $\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- 32) Dans le cas où, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{2^n}$ ,
- A)  $S\left(\frac{1}{2}\right)$  n'existe pas
  - B)  $S\left(\frac{1}{2}\right)$  existe et  $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$
  - C) la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur I
  - D) la série  $\sum f_n(x)$  ne converge pour aucune valeur de  $x$  dans I
- 33) Dans le cas où, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = (-1)^n$ ,
- A) pour tout  $x$  dans I,  $f_n(x)$  est la suite géométrique de premier terme  $1 - x$  et de raison  $-x$
  - B) pour tout  $x$  dans I,  $S(x)$  existe et  $S(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$
  - C) Pour tout  $x$  dans I, la série  $\sum f_n(x)$  vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées
  - D) la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur I
- 34) Dans le cas où  $(a_n)$  est une suite bornée, la série de fonctions  $\sum f_n$
- A) converge simplement en tout point de I
  - B) converge uniformément sur I
  - C) ne converge pas absolument en au moins un point de I
  - D) converge normalement sur I
- 35) Dans le cas où  $(a_n)$  est une suite de réels décroissante, la série de fonctions  $\sum f_n$
- A) converge simplement en tout point de I
  - B) converge uniformément sur I
  - C) ne converge pas absolument en au moins un point de I
  - D) converge normalement sur I

Dans tout ce qui suit, on suppose que  $(a_n)$  est une suite décroissante de réels positifs.

- 36) La série de fonctions  $\sum f_n$
- A) converge simplement en tout point de I
  - B) converge uniformément sur I
  - C) est telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty = \frac{a_n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
  - D) converge normalement sur I

- 37) Dans le cas où, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,
- A) la série de fonctions  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur I et converge uniformément sur I
  - B) la série de fonctions  $\sum f_n$  ne converge simplement en aucun point de I
  - C) la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur I vers la fonction nulle
  - D) la suite de fonctions dérivées  $(f_n')$  converge uniformément sur I vers la fonction nulle
- 38) Dans le cas où, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$ ,
- A)  $S(x)$  existe pour tout  $x$  dans I et  $S(x) = (1 - x) \ln |x - 1|$
  - B)  $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{en^2}$
  - C) il existe  $x$  dans I tel que  $S(x)$  n'existe pas
  - D)  $S(x)$  existe pour tout  $x$  dans I et  $\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = 0$
- 39) Dans le cas où, pour tout  $n \geq 2$ ,  $a_n = \frac{1}{\ln n}$ , et  $a_1 = 2$ ,
- A)  $\left(\frac{a_n}{n}\right)$  converge vers 0
  - B) la série  $\sum \frac{a_n}{n}$  converge
  - C) la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur I
  - D) la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur I
- 40) En utilisant uniquement les trois cas précédents (questions 37 à 39), on a démontré en particulier
- A) que si une série de fonctions converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur cet intervalle
  - B) qu'une série de fonctions peut converger normalement sur un intervalle sans converger uniformément sur cet intervalle
  - C) que la convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle n'entraîne pas sa convergence normale sur cet intervalle
  - D) que la convergence simple d'une série de fonctions en tout point d'un intervalle n'entraîne pas sa convergence uniforme sur cet intervalle