Corrigé

Correction exercice 1.

1. On pose, lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{e}^{-t} = 1$, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1}$ lorsque t tend vers 0^+.

- Si $x \leqslant 0$, alors $x - 1 \leqslant -1$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc Γ n'est pas définie pour $x \leqslant 0$.
- Si $x > 0$, alors $x - 1 > -1$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. D'autre part, $t^2\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{\Delta = \mathbb{R}_+^*}$.

1.2. Soit $x \in \Delta$. On pose $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on peut réaliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} x t^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$.

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On montre par une récurrence simple que $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$. Donc :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{2n}\exp\left(-t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{2n}\exp\left(-t^2\right) = 0$ par croissances comparées. Donc $t^{2n}\exp\left(-t^2\right) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et la fonction $t \mapsto t^{2n}\exp\left(-t^2\right)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrale I_n est donc bien définie.

2.2. La fonction $u : t \mapsto t^2$ étant une bijection strictement croissante et C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on effectue le changement de variable $u = t^2$ ($\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/2\sqrt{u}$) :

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^n\, \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, $\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}$.

3. On pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$

3.1. La fonction $u \mapsto \cos u$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}}$$

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique le théorème d'intégration terme à terme :

- les fonctions $f_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t^2}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$;
- d'après la question précédente, la série $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- la série
$$\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}I_n$$
converge car $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}I_n = \dfrac{x^{2n}}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi} = \dfrac{(x^2/4)^n}{n!}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, qui est le terme général d'une série exponentielle.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\boxed{H(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2/4)^n}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4. On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

4.1. Notons $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \mapsto \cos(xt)\exp(-t^2)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(x,t)| \leq \exp(-t^2)$ et cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **2.1.**.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\exp(-t^2)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\exp(-t^2)$, et la fonction $t \mapsto t\exp(-t^2)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.1.**.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $H'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(xt)\exp(-t^2)\mathrm{d}t$. On pose $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \dfrac{1}{2}\exp(-t^2)$ qui sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$H'(x) = \frac{1}{2}[\sin(xt)\exp(-t^2)]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp(-t^2)\mathrm{d}t$$

Ainsi, H est solution de $\boxed{y' = -\dfrac{x}{2}y}$.

4.3. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$ est $x \mapsto -\dfrac{x^2}{4}$. La solution générale de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{x}{2}y$ est donc $y_g(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Comme $H(0) = I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on retrouve que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}$ par unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Correction exercice 2.

1. Questions de cours :

1.1. C'est une somme de Riemann : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f : x \mapsto x^m$ qui est continue sur $[0,1]$. On obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m = \frac{1-0}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(0 + j\frac{1-0}{n}\right)$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m = \int_0^1 t^m\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m+1}}$$

1.3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité uniforme sur $[\![1, n]\!]$ son espérance est : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

* * * * * *

Soient k et n deux entiers naturels non nuls. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

2. La variable aléatoire X_n peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 et n.
En effet, si $j \in [\![1, n]\!]$, alors X_n prend la valeur j si par exemple, on a tiré la boule numérotée j dans la première urne et les boules numérotées 1 dans les autres. Donc $\boxed{J = [\![1, n]\!]}$.

3. Soit $j \in J$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro tiré dans l'urne i.
On a donc $\mathbb{P}(Y_i \leqslant j) = \dfrac{j}{n}$.
Comme les tirages dans les différentes urnes sont indépendants, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendantes. De plus, $(X_n \leqslant j) = (Y_1 \leqslant j) \cap \ldots \cap (Y_k \leqslant j)$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X_n \leqslant j) = \left(\dfrac{j}{n}\right)^k}$.

Si $j = 1$, alors $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n \leqslant 1) = \dfrac{1^k}{n^k}$.
Si $j > 1$, alors $\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n \leqslant j) - \mathbb{P}(X_n \leqslant j-1) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Remarquons que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n > j) = \displaystyle\sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k)$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{0 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)}$.

5. On utilise les deux questions précédentes, en remarquant que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 0) = 0 = \left(\frac{0}{n}\right)^k$:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant j)) \\ &= n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k \end{aligned}$$

D'après les questions de cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k = \frac{1}{k+1}$. et donc $\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{k+1} + o(n)$. Par suite :

$$E(X_n) \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{n}{k+1} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{nk}{k+1} + o(n)$$

Et finalement : $\boxed{E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}}$

6. Lorsque $k = 1$, la variable X_n est égale au numéro obtenu en tirant une boule dans une urne. Elle suit donc la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

D'après la question de cours, $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$, ce qui correspond au résultat trouvé à la question précédente pour $k = 1$.

Correction exercice 3.

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\,\|$.

1. **Questions de cours**

1.1. Si y est le vecteur nul, alors l'inégalité est vérifiée.
Sinon, on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|x + t\,y\|^2$. On développe :

$$\begin{aligned} P(t) &= (x + t\,y | x + t\,y) \\ &= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(x|y). \end{aligned}$$

P est donc une fonction polynomiale de degré 2 qui est toujours positive : son discriminant Δ est négatif ou nul. Or $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2$. D'où

$$4(x|y)^2 \leqslant 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

ce qui donne

$$\boxed{|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

1.2. Il y a égalité dans l'inégalité précédente ssi y est le vecteur nul ou le discriminant de P s'annule, c'est à dire si P admet une racine réelle. Ainsi :

$$\boxed{|(x|y)| = \|x\|\,\|y\| \iff (y = 0 \text{ ou } \exists t \in \mathbb{R}, x + t\,y = 0) \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$$

1.3. En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}$$

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad F(X) = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} x_i\, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_3x_1+x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. On développe le carré :

$$[S_1(n)]^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i\, x_j = S_2(n) + F(x)$$

Donc

$$\boxed{F(x) = [S_1(n)]^2 - S_2(n)}$$

3. La fonction F est continue sur B qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$.
Il en résulte d'après le cours que F possède un maximum M sur B.

4. D'après la question de cours, pour tout $X \in B$:

$$F(X) = [S_1(n)]^2 - S_2(n) \leqslant \left(\sqrt{n}\,\sqrt{S_2(n)}\right)^2 - S_2(n) = (n-1)\,S_2(n) \leqslant n-1$$

car $S_2(n) = \|X\|^2 \leq 1$.
Ainsi, $M \leqslant n-1$.
Or en prenant le vecteur $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, on vérifie que $X \in B$ et que $F(X) = n-1$.

Conclusion : $\boxed{M = n-1}$

5. D'après la question précédente et la question de cours, $F(X) = M$ ssi $S_2(n) = 1$ et X est colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$.

On a donc $\boxed{X = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)}$

Partie 2.

On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X|Y) = X^T Y$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \left(x_i y_j + x_j y_i\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. On a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi(X, X) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_j x_i \\ &= \frac{1}{2}F(X) + \frac{1}{2}F(X)\end{aligned}$$

Et finalement : $\boxed{F(X) = \varphi(X, X)}$

7. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i, e_i) = 0$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

8. La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
Par suite, il existe une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\begin{aligned}Y^T AX &= \sum_{i=1}^{n} y_i (AX)_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}} x_k \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ i\neq k}} y_i x_k.\end{aligned}$$

De même,

$$X^T AY = \sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ i\neq k}} x_i y_k$$

Noter que comme $Y^T AX \in \mathbb{R}$, on a immédiatement : $Y^T AX = (Y^T AX)^T = X^T AY$ puisque A est une matrice symétrique.

Enfin,

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\left(x_iy_j + x_jy_i\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_iy_j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_jy_i\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_iy_j\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\varphi(X,Y) = Y^TAX = X^TAY}$$

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

10.1. La matrice J est de rang 1 car toutes ses colonnes sont colinéaires entre elles. Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. Puis, le vecteur $(1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ est propre associé à la valeur propre n. Donc $\boxed{\mathbf{Sp}(J) = \{0,n\}}$

10.2. La matrice J est diagonalisable et d'après la question précédente :

il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'où $A = J - I_n = P(D-I_n)P^{-1}$: A est semblable à

$$\boxed{\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

11. On suppose que u_1 est vecteur propre associé à $n-1$ et les autres sont associés à -1. Soit $X = \sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{n}\mu_iu_i$.

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= (Y|AX)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\mu_iu_i|(n-1)\lambda_1u_1 - \sum_{i=2}^{n}\lambda_iu_i\right)\\ &= (n-1)\mu_1\lambda_1 - \sum_{i=2}^{n}\mu_i\lambda_i\end{aligned}$$

12. Pour tout $X \in B$, $F(X) = \varphi(X, X) = (n-1)\lambda_1^2 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 \leqslant (n-1)\lambda_1^2$.

Or $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ car $\mathcal{U}$ est orthonormale et donc $\lambda_1^2 \leq \|X\|^2 \leq 1$.

On retrouve ainsi : $F(X) \leq n - 1$.

De plus, pour $X = u_1$, on a $F(u_1) = n - 1$ et donc $\boxed{M = n - 1}$

Correction exercice 4.

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $|z|^2 = z\bar{z}$, donc $|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $\overline{\omega^k} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2i\pi - \frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}$, on trouve $\boxed{\text{si } k \in [\![1, n-1]\!],\ r = n-k}$ et $\boxed{\text{si } k = 0,\ r = 0}$

3. Comme $n \geqslant 2$, $\omega \neq 1$, donc on applique la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0}$$

car $\omega^n = 1$.
Puis,

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \exp\left(\frac{\cancel{2}i\pi}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\right)$$

donc $\boxed{P_n = (-1)^{n-1}}$

4. On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k X^{k-1}$.

4.1. Le polynôme P est le polynôme dérivé de $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$Q(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

En dérivant, on trouve pour tout $x \neq 1$:

$$\boxed{P(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$$

4.2. D'après la question précédente, pour tout x réel différent de 1,

$$(x-1)P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

On a deux polynômes qui sont égaux en une infinité de réels, ils sont donc égaux.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$(\omega^k - 1)P(\omega^k) = n(\omega^k)^{n+1} - (n+1)(\omega^k)^n + 1.$$

Comme $\omega^k \neq 1$:

$$P(\omega^k) = \frac{n\omega^{k(n+1)} - (n+1)\omega^{kn} + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\cancel{(\omega^k - 1)}}{(\omega^k - 1)^{\cancel{2}}}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P(\omega^k) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}}$

4.3. Les racines de $X^n - 1$ sont les ω^k, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$. Or, d'après l'égalité de Bernoulli, $X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Ainsi, $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. En substituant $X = 1$, on trouve : $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \omega^k\right) = n}$

5. Réduction de la matrice F.

5.1. On a facilement :

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } k \in [\![2, n-1]\!] : F^{\,k} = \begin{pmatrix} 0_{n-k,n-k} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

et enfin : $F^{\,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^n = I_n$.

5.2. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $F^{nk+l} = F^l$.
On en déduit que $G_F = \text{Vect}\left(I_n, F, F^2, ..., F^{\,n-1}\right)$, et donc que la famille $H = \left(I_n, F, F^2, ..., F^{\,n-1}\right)$ engendre le sous-espace G_F.

Soient $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille de scalaires tels que : $\sum_{i=0}^{n-1} a_i F^i = O_n$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} = O_n$$

et donc, $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$. La famille H est donc libre.

On conclut : $\boxed{H \text{ est une base de } G_F}$ et $\boxed{\dim(G_F) = n}$.

5.3. D'après la question précédente, la famille $\left(I_n, F, F^2, \ldots F^{n-1}\right)$ est libre, donc le polynôme minimal de F est de degré au moins n. De plus, $X^n - 1$ est annulateur pour F. C'est donc le polynôme minimal de F.

5.4. Comme $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de F et qu'il est scindé à racines simples, F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Comme $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F, les valeurs propres de F sont exactement les racines de $X^n - 1$: ce sont les ω^k avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est semblable à } D = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})}$.

6. Réduction de la matrice A.

6.1. On trouve :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ddots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}}$$

6.2. D'après la question **5.5.4.**, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $F = QDQ^{-1}$. Ainsi,

$$A = P(F) = \sum_{k=1}^{n} k\left(QDQ^{-1}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kQD^{k-1}Q^{-1} = Q\left(\sum_{k=1}^{n} kD^{k-1}\right)Q^{-1}$$

Donc A est semblable à la matrice $\boxed{P(D) = \operatorname{diag}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\omega - 1}, \frac{n}{\omega^2 - 1}, \ldots, \frac{n}{\omega^{n-1} - 1}\right)}$

6.3. Comme les valeurs propres de A sont toutes distinctes, $\boxed{\text{le polynôme minimal de } A \text{ est de degré } n}$

Prenons $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0_n$. Alors, le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n. Par minimalité du polynôme minimal, Q est donc le polynôme nul : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi $\boxed{\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right) \text{ est une famille libre}}$

7. D'après la question **6.6.2.**, $\det(A) = \dfrac{n(n+1)}{2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega^k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k - 1)}$.

Puis, d'après la question **4.4.2.**, $\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2} \neq 0}$ et A est inversible.

8. Le polynôme minimal de A, $P_A \in \mathbb{C}[X]$, n'admet pas 0 comme racine.

Il s'écrit donc $P_A = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, avec $\lambda_0 \neq 0$. Comme $P_A(A) = 0$, on a :

$$\lambda_0 I_n = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A^k = A\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} A^k\right).$$

Donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} A^k$. On a bien $\boxed{A^{-1} \in G_A}$

9. Soit $M \in G_A$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tels que $M = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k A^k$. Autrement dit, en posant $Q = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k X^k$, $M = Q(A)$. Or, $A = P(F)$, donc $M = Q(P(F)) = Q \circ P(F)$. Ainsi, $M \in G_F$.

Donc $\boxed{G_A \subset G_F}$

D'autre part, comme la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre, $\dim(G_A) \geqslant n$.

Comme $\dim(G_F) = n$, on a donc $\boxed{G_F = G_A}$

10. D'après la question **4.4.1.**, $P \times (X-1)^2 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. En substituant X par F, on trouve :

$$A(F - I_n)^2 = nF - (n+1)I_n + I_n$$

On a donc bien $\boxed{A\ (F - I_n)^2 = n\ (F - I_n)}$

11. D'après les questions **8.** et **9.**, il existe des scalaires $\left(y_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\ F^k$.

La question précédente donne : $n\,A^{-1}\ (F - I_n) = F^2 - 2\,F + I_n$. Puis :

$$\begin{aligned} F^2 - 2\,F + I_n &= n\,(F - I_n) \sum_{k=0}^{n-1} y_k\ F^k \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} y_k F^{k+1} - n\sum_{k=0}^{n-1} y_k F^k \\ &= n\sum_{k=1}^{n-1} (y_{k-1} - y_k) F^k + (n y_{n-1} - n y_0) I_n \end{aligned}$$

Comme la famille $\left(I_n, F, \ldots, F^{n-1}\right)$ est libre, on identifie :

$$y_2 = y_3 = ... = y_{n-1},\ \ y_{n-1} - y_0 = \frac{1}{n},\ \ y_0 - y_1 = -\frac{2}{n} \quad \text{et} \quad y_1 - y_2 = \frac{1}{n}$$

Cela ne suffit pas pour conclure.

On va donc chercher une autre égalité en utilisant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet, $F^k U = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $A\,U = \dfrac{n\,(n+1)}{2}\ U$, on trouve $\dfrac{2}{n\,(n+1)}\ U = A^{-1}\,U = (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})\ U$.

On obtient l'égalité manquante : $y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} = \dfrac{2}{n\ (n+1)}$.
Finalement, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{2}{n^2\,(n+1)}\ \left(F^2 + ... + F^{n-1}\right) + \frac{2 - (n+1)\,n}{n^2\,(n+1)}\ I_n + \frac{2 + n\,(n+1)}{n^2\,(n+1)}\ F}$$

On pouvait aussi raisonner avec les polynômes : en effet, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = Q(F)$ (questions **8.** et **9.**). Donc $P(F)Q(F) = I_n$. Ainsi, le polynôme $PQ - 1$ annule la matrice F.
Comme le polynôme minimal de F est $X^n - 1$ (question **5.5.3.**), celui-ci divise $PQ - 1$. On évalue $PQ - 1$ aux racines de $X^n - 1$. On a donc : $\dfrac{n(n+1)}{2} Q(1) - 1 = 0$ et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{n}{\omega^k - 1} Q(\omega^k) - 1 = 0$ (question **4.4.2.**).
On remarque que $Q - \dfrac{1}{n}(X-1)$ admet les ω^k comme racines avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Or ce polynôme est de degré au plus $n-1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q - \dfrac{1}{n}(X-1) = \lambda(1 + X + \cdots + X^{n-1})$.
En évaluant en 1, on trouve $\lambda = \dfrac{2}{n^2(n+1)}$.
D'où $A^{-1} = \dfrac{2}{n^2(n+1)}(I_n + F + F^2 + \cdots + F^{n-1}) + \dfrac{1}{n}(F - I_n)$.