CORRECTION

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \longmapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall\, x \in I,\ f_0(x) = 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\,(x\,\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$

1. Le seul problème est en zéro et on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\,\ln(x) = 0$.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

Soit $x \in I$.

• Si $x = 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(0) = 1$

• Si $x \in]0,1]$, on reconnaît le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \exp(u)$ appliquée à $u = -x\,\ln(x)$, qui est valable pour tout $x > 0$.

Et finalement : la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge vers la fonction f.

3. Par produit, la fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $t \in]0,1]$, $\varphi'(t) = 1 + \ln(t)$. D'où :

- La fonction φ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

- Elle est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$ avec $\varphi(1) = 0$.

4. • $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)}{t} = -\infty$ et il y a au point O une tangente verticale.

• $\varphi'(1) = 1$ et au point $(1,0)$, la tangente est parallèle à la première bissectrice.

5. Pour tout entier naturel n et tout $t \in I$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n\,\varphi^n(t)}{n\,!}$.

On a donc pour tout entier naturel n : $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\|\varphi\|_\infty^n}{n\,!} = \dfrac{(\mathrm{e}^{-1})^n}{n\,!}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\|\varphi\|_\infty^n}{n\,!}$ étant convergente (série exponentielle), la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

6.1. Pour tout réel x, la fonction $h : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

• $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,

• $h(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

On conclut : L'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par une intégration par parties, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$. Cette intégration par parties est justifiée car la limite en $+\infty$ de $t^n\mathrm{e}^{-t}$ existe et que l'on manipule des fonctions intégrables.

Sachant que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on obtient par récurrence sur n : $\Gamma(n+1) = n\,!$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$, on pose donc, comme l'indique l'énoncé : $u = -\ln(t)$.

La fonction $t \mapsto -\ln(t)$ réalise une bijection de classe C^1 de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ et $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\,\mathrm{e}^{-(n+1)u}\,\mathrm{d}u$.

Le changement de variable affine $v = (n+1)u$ donne alors $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,v^n\,\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$ et donc, $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\Gamma(n+1) = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

8. D'après la question **5.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I. D'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme sur un segment, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f_0(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

On peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme. En effet :

• Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0,1]$, et donc intégrables.

• La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers la fonction f qui est continue sur I.

• $\displaystyle\int_I |f_n| = \int_I f_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge puisque $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, le théorème d'intégration terme à terme s'applique.

9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^n} - J\right| = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Or, on a : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{N+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^N(N-1)}$.

Mais $7 \times 8^8 > 10^8$, donc : pour $N \geqslant 8$, on a : $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n} - J\right| < 10^{-8}$.

Exercice 2.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$ et la norme $\|\,\|$.
On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien admet une base orhonormale de vecteurs propres.

1.2. Comme f est non inversible et E est de dimension finie, f n'est pas injective. Donc 0 est valeur propre.

Supposons par l'absurde que 0 soit la seule valeur propre de f : comme f est diagonalisable (théorème spectral) sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nulle et par suite, f serait nulle, ce qui n'est pas.

Ainsi, f possède au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Soient $x \in \mathrm{Ker}(f) : f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}(f) : \exists\, t \in E$ tel que $y = f(t)$,.

Alors : $(x|y) = (x|f(t)) = (f(x)|t) = 0$ ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux et donc, en somme directe.

Le Théorème du rang prouve alors qu'ils sont supplémentaires dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1,\ \ \lambda_0 = 0 \ \text{ et } \ 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

1.4. D'après le Théorème Spectral, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f :

$$E = \bigoplus_{j=0}^{k} E_j.$$

Ainsi :

$\forall\, x \in E$, il existe de façon unique des $x_j \in E_j$, $j \in [\![0,k]\!]$ orthogonaux deux à deux tels que $x = \sum_{j=0}^{k} x_j$, ce qui signifie que $\mathrm{id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Soient $x \in E$, $(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$, $i \neq j$.

Alors : $p_i(p_j(x)) = p_i(x_j) = 0$ puisque les sous-espaces E_j sont orthogonaux.

Ainsi : $\forall\, (i, j) \in [\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. On sait que (question **1.1.4.**) : $\mathrm{id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

En composant par f, on obtient : $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (f \circ p_j)$.

Or pour tout x de E, $(f \circ p_j)(x) = f(x_j) = \lambda_j\, x_j = \lambda_j\, p_j(x)$, ce qui prouve que $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_j\, p_j$.

1.7. Comme

- $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$ (question **1.1.3.**),
- $\mathrm{Ker}(f) = E_0$,
- $(E_0)^{\perp} = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_j$ (Théorème spectral),

on obtient que $\mathrm{Im}(f) = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_j$ et par suite, $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

2.1. On a : $f \circ f^I = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_j\, p_j\right) \circ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i}\, p_i\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\, (p_j \circ p_i) = \sum_{j=1}^{k} p_j = p$

Soient x et y dans E.

On a : $f(x) = p(y) \iff f(x) = f\left(f^I(y)\right) \iff f\left(x - f^I(y)\right) = 0 \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$

Ainsi : $\forall\, (x, y) \in E^2, \left(f(x) = p(y) \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)$.

2.2. Soit x et y deux vecteurs de E.

On a :

$\|f(x) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff \|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{u \in \mathrm{Im}(f)} \|u - y\| \iff f(x) = p(y)$ puisque p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$

Donc, $\|f(x) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après la question précédente.

Finalement :

$$\forall\, x \in E, \quad \left(\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)$$

3. Application à un exemple.

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1. • L'endomorphisme f est symétrique puisque sa matrice est symétrique dans une base orthonormale.

• f est non nul puisque $A \neq O_4$.

• Dans la matrice A, la colonne C_4 est l'opposée de la colonne C_2 et donc, $\text{rg}(A) \leqslant 3$ et f n'est pas inversible.

3.2. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Ainsi, 2 est valeur propre double de A si et seulement si $\dim(\text{Ker}(A - 2I_4)) = 2$.

On a : $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La recherche de $\text{Ker}(A - 2I_4)$ aboutit au système :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases},$$

ce qui donne $\text{Ker}(A - 2I_a) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ qui est bien de dimension 2.

On pouvait aussi remarquer que les colonnes de $A - 2I_4$ vérifient : $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2$ et (C_1, C_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Il en résulte que $\text{rg}(A - 2I_4) = 2$ et donc que $\dim(\text{Ker}(A - 2I_4)) = 2$, ce qui prouve que 2 est valeur propre d'ordre 2 de A.

3.3. Faisons le bilan sur les valeurs propres de la matrice A :

• 0 est valeur propre,

• 2 est valeur propre d'ordre 2,

• A est diagonalisable puisque symétrique réelle.

Il manque donc une valeur propre. On la note λ.

En utilisant la trace de A, on peut écrire : $\text{tr}(A) = 8 = 0 + 4 + \lambda \Longrightarrow \lambda = 4$

Conclusion : 0 est valeur propre simple, 2 est valeur propre double et 4 est valeur propre simple.

On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

3.4. D'après la question **1.6.**, on peut écrire que $f = 0\, p_0 + 2\, p_1 + 4\, p_2$, ce qui donne en écriture matricielle : $A = 2\, M_1 + 4\, M_2$.

3.5. On a : $A - 4\, I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La recherche de $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 4I_4)$ aboutit au système :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 3y + t = 0 \\ y + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $E_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur de norme 1.

On pouvait aussi remarquer que les colonnes de $A - 4I_4$ vérifient $C_3 = C_1$ et facilement, la famille (C_1, C_2, C_4) est libre.

On en déduit que $\mathrm{rg}(A - 4\, I_4) = 3$ et donc, $\dim(E_2) = 1$.

De façon plus précise, $E_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.6. Soit $x \in E$.

On peut écrire : $x = (x|v_2)\, v_2 + (x - (x|v_2)\, v_2)$.

• le vecteur $(x|v_2)\, v_2$ appartient à E_2.

• $(x - (x|v_2)\, v_2) = (x|v_2) - (x|v_2)\, \|v_2\|^2 = 0$ puisque v_2 est normé.

Conclusion : $p_2(x) = (x|v_2)\, v_2$.

3.7. Pour écrire la matrice M_2 de p_2 dans la base $\mathscr{B}$, on détermine les images des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$:

$p_2(e_1) = \left(e_1 \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)\right)\,(e_1 - e_3) = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$p_2(e_2) = 0$

$p_2(e_3) = \left(e_3 \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)\right)\,(e_1 - e_3) = -\dfrac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$p_2(e_4) = 0$

et par suite : $M_2 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. D'après la question 1.7., on a $f^I = \frac{1}{2}\, p_1 + \frac{1}{4}\, p_2$.

ce qui donne matriciellement en notant B la matrice de f^I dans la base $\mathscr{B}$: $B = \frac{1}{2}\, M_1 + \frac{1}{4}\, M_2$.

Or $M_1 = \frac{1}{2}\, A - 2\, M_2$ et donc, $B = \frac{1}{4}\, A - \frac{3}{4}\, M_2$,

ce qui donne : $B = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t| < 1$ on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$,

1. On peut écrire que : $\forall\, t \in]-1, 1[$, $G_X(t) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n$ puisque $\dfrac{t}{2} \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\subset]-1, 1[$

2. D'après le cours, le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ est :

$$\frac{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}-1).....(\frac{1}{2}-(n-1))}{n\,!}\, t^n = \frac{1(-1)(-3).....(-(2n-3))}{2^n\, n\,!}\, t^n = \frac{(-1)^{n-1}\, 1.3.....(2n-3)}{2^n\, n\,!}\, t^n$$

3. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on peut écrire :

$$G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t} = 2 - \sqrt{2}\, \sqrt{1-\frac{t}{2}}.$$

On pose alors $u = \dfrac{t}{2}$: comme $|u| < 1$, on peut appliquer les résultats de la question précédente et :

$$\sqrt{1-u} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 1.3.....(2n-3)}{2^n\, n\,!} \left(-\frac{t}{2}\right)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\, n\,!}\, t^n$$

et finalement : $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\, n\,!}\, t^n$

4. En utilisant les coefficients de $G_X(t)$ et $G_Y(t)$, on obtient :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- $\mathbb{P}(Y = 0) = 2 - \sqrt{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \sqrt{2}\, \dfrac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\, n\,!}$

5. Comme X et Y sont indépendantes, on a pour tout $t \in]-1,1[$: $G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$

Soit : $\forall\, t \in]-1,1[,\ G_{X+Y}(t) = \dfrac{2}{2-t} - \dfrac{1}{\sqrt{2-t}} = \dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^{-1/2}.$

D'après le cours, le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^{-1/2}$ est :

$$\frac{-\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n\,!}\,u^n = \frac{(-1)(-3)...(-(2n-1))}{2^n\,n\,!}\,u^n = \frac{(-1)^n\,1.3.....(2n-1)}{2^n\,n\,!}\,u^n$$

$$= \frac{(-1)^n\,(2n)\,!}{2^n\,n\,!\,2.4.....2n}\,u^n = \frac{(-1)^n\,(2n)\,!}{2^{2n}\,(n\,!)^2}\,u^n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}u^n$$

Ainsi, en posant $u = \dfrac{t}{2}$ et en utilisant les développements connus du cours :

$$\forall\, t \in]-1,1[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\left(-\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{3n+1/2}}\binom{2n}{n}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^n$$

On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X+Y=n) = \frac{1}{2^n}\left[1-\frac{1}{2^{2n+1/2}}\binom{2n}{n}\right]$$

Remarque : on pouvait aussi répondre à cette question en utilisant la formule $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$, puis en utilisant les résultats de la question **4.**.

6. Calculs d'espérances et de variances

6.1. D'une part, la variable aléatoire $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, d'après la question **4.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X+1=n) = \mathbb{P}(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi, la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

6.2. Il en résulte que $\mathbb{E}(X+1) = 2$ et $\mathbb{V}(X+1) = 2$. Donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1)-1 = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 2$.

6.3. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \lim\limits_{t\to 1^-} G_Y'(t) = \dfrac{1}{2}$ puisque $G_Y'(t) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{2-t}}$

De $G_Y''(t) = \dfrac{1}{4(2-t)^{3/2}}$, on tire $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \lim\limits_{t\to 1^-} G_Y''(t) = \dfrac{1}{4}$.

6.4. Puisque $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2$ on a : $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}$.

6.5. • Par linéarité, $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \dfrac{3}{2}$

• Comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La famille $\mathcal{B}$ est contituée de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ

2.1. L'application φ est une application linéaire puisque l'intégrale est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Comme φ n'est pas nulle, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de dimension n.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1. La linéarité de l'application ψ découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.

3.2. Notons $C = (P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = X^k$.

D'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(C))$.

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\psi(P_k) = \displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,P_{k+1}$

On en déduit que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.

3.3. On remarque tout d'abord que pour tout polynôme P, 0 est racine de $\psi(P)$ et $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a immédiatement : $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \iff 1$ est racine de $\psi(P)$.

Ainsi, si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$, alors 1 est racine de $\psi(P)$, et donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors 1 et 0 sont racines de $\psi(P)$, donc $\psi(P)$ est divisible par $X(X-1)$.

Comme $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

Conclusion : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

3.4. D'après la question précédente :

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1)) \iff \exists (a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ telle que $\psi(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\,X^k(X-1)$

Ainsi, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P = (\psi(P))' = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\,X^{k-1}((k+1)\,X - k) \in \mathrm{Vect}\left(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Comme $\left(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est échelonnée en degré, c'est une famille libre, et comme $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n$, on en déduit que c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. D'après le cours, $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = n + 1$.

4.2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.

On remarque que pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\psi_k(P_k) = 1$ et $\psi_k(P_j) = 0$ pour tout $j \neq k$.

Soient alors $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\,\psi_k = 0$ (forme linéaire nulle).

On applique à P_j, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et il reste $b_j = 0$, ce qui prouve que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est libre.

Comme elle est constituée de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, c'est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. D'après la question précédente, il existe une unique famille $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de scalaires tels que : $\displaystyle\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\psi_k$.

Pour déterminer les a_k, il suffit d'évaluer en P_j et on obtient : $\displaystyle\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\,\psi_k$.