## Rapport sur l'épreuve de Mathématiques MP 2

---

### Présentation du sujet

Le problème étudie une suite définie implicitement. Il s'agit de la suite des zéros réels des sommes partielles de degré impair du développement en série entière de la fonction exponentielle en 0. On démontre dans le problème que cette suite diverge en décroissant vers $-\infty$, puis qu'elle est équivalente à la suite $(\rho n)$, où $\rho$ est un nombre dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$ défini par la propriété $\rho e^{(1-\rho)} = -1$.

### Commentaire général de l'épreuve et Analyse générale

Cette épreuve consiste en un problème pour une durée de trois heures. 2353 candidats ont participé à l'épreuve de mathématiques MP2 de 2017. La moyenne finale est de 9,43 et l'écart-type est de 3,94.

De façon usuelle, le sujet est conçu pour être très progressif, avec des questions élémentaires, et de vérification des connaissances (concepts et théorèmes du programme), puis des questions plus difficiles. Il n'était pas attendu des candidats qu'ils traitent l'intégralité du problème et aucun ne l'a fait. Ce sont finalement les questions classiques et de bon sens qui trient les copies, plus que les questions techniques abordées seulement dans de rares très bonnes copies. Des notes très correctes peuvent être obtenues en traitant correctement et précisément les questions élémentaires.

Dans la plupart des copies, le soin apporté à l'écriture et à la présentation est salué par les correcteurs, mais il reste néanmoins quelques copies particulièrement difficiles à déchiffrer. En particulier, ce sujet demandait plusieurs représentations de graphes de fonctions sans difficultés particulières : le jury attendait des dessins propres et lisibles, et a pénalisé ceux qui ont négligé leurs représentations.

### Analyse des résultats par parties

— Le problème commence par une partie très classique d'algèbre linéaire qui permet d'introduire une suite de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n$ étant le développement de Taylor de degré $n$ de la fonction exponentielle en 0.. Les notions abordées sont la notion d'endomorphisme, automorphisme, valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation, base. Dans l'ensemble, cette partie est bien réussie. Le jury a néanmoins constaté des insuffisances d'argumentation pour justifier qu'une application linéaire injective est surjective lorsque l'espace de départ et de celui d'arrivée sont de la même dimension finie. C'est bien sûr le cas lorsque l'application consdérée est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, mais l'argument "comme on est en dimension finie" est abusivement utilisé, si on ne précise pas qu'on considère un endomorphisme.

Il a aussi remarqué un nombre conséquent de copies où après avoir correctement justifié le fait que 1 est valeur propre de l'endomorphisme $\varphi_n$, on démontre que le sous-espace

$\ker(\varphi_n - Id)$ est réduit à $\{0\}$. La cohérence des raisonnemnents fait partie des compétences attendues dans l'épreuve de problème.

— La partie II introduit la suite $(\alpha_n)$ où $\alpha_n$ est l'unique zéro de $S_n$, pour $n$ impair et on démontre la décroissance de la suite et sa divergence vers $-\infty$. Les notions abordées relèvent essentiellement de l'étude des tableaux de variations des polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On utilise aussi la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle de convergence des sommes partielles vers la série entière. Les représentations de fonctions sont très inégalement réussies : l'allure de la fonction exponentielle est le plus souvent connue, mais les allures proposées pour un polynôme de degré 3 sont parfois déconcertantes. Par ailleurs, il fallait donner fournir un dessin suffisamment propre et précis pour qu'on puisse apprécier la position relative des courbes. Certains ont choisi avec raison de commenter en plus leurs dessins, ce qui a le mérite de lever les ambiguités. La question 9 suggérait explicitement de procéder par récurrence et le jury a constaté avec satisfaction que le principe de la démonstration par récurrence était beaucoup mieux maitrisé que les années précédentes. Mais la démonstration elle-même était rarement complète,. De meme, pourla question 10a, l'argumentation était rarement suffisante, très peu de candidats invoquent la *stricte* croissance d'une fonction $f$ pour avoir la propriété $f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$. La question 10b a montré de graves confusions entre les différentes notions de convergence, la plupart des candidats intervertissent les quantificateurs au besoin. Quant à la question 10c, on pouvait la traiter par l'absurde ou directement, mais il fallait au moins avant de montrer que la limite ne peut être strictement positive, avoir justifié l'existence de la limite.

— La partie III permet de définir le nombre $\rho$, d'en obtenir un encadrement ainsi qu'un encadrement de la suite $(\alpha_n/n)_n$ en fonction de $\rho$. Cette partie a été abordée mais rarement traitée correctement. Le théorème de la bijection est ignoré dans la quasi totalité des copies. Seules les questions 15a et 15b ont été vraiment abordées.

— La partie IV et la partie V n'ont servi le plus souvent qu'à obtenir quelques points de grapillage. Peu ont tenté les questions 17 et 18 mais ont reconnu l'utilisation de la formule de Stirling dans la question 19. De même, les seules questions significativement réussies dans la partie V sont les questions 23 a et b, contrairement aux questions 22 a et b (le développement de $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$ est très souvent faux).

**Conseil aux futurs candidats**

— Nous conseillons aux futurs candidats de résoudre posément les questions et de s'interroger sur le sens global et la cohérence des résultats qu'il obtient.

— Le cours doit être su. Il faut le citer précisément lorsqu'on l'utilise et en vérifier les hypothèses.

— Soignez globalemnt votre travail : présentation, argumentation, dessins...