Rapport sur l'épreuve de Mathématiques MP1 (exercices) 2016

Présentation du sujet

L'épreuve de mathématiques 1 filière MP était constituée de quatre exercices indépendants. Le sujet balayait une large part du programme d'analyse MP (diagonalisation des matrices symétriques réelles, intégrales généralisées, séries de fonctions, intégrales dépendant d'un paramètre, couples de variables aléatoires discrètes). Certaines questions portaient également sur des points du programme de première année (équations différentielles linéaires du premier ordre, produit scalaire et projections orthogonales, loi binomiale). Il y avait également quelques questions portant sur le programme d'informatique commune (méthode d'Euler, méthodes de calcul approché d'intégrales et calcul de sommes simples).

Nous n'avons pas décelé de problèmes ou d'imprécisions dans le sujet qui soit à même de gêner les candidats. De plus, la longueur du sujet était raisonnable.

Commentaire général de l'épreuve. L'épreuve a été traitée par 3226 candidats. Les notes se sont étalées entre 0 et 20. La moyenne de cette épreuve est de 9.79 avec un écart-type de 4.21. Il y a peu de copies réellement faibles. On trouve également quelques copies proposant parfois des solutions réellement intéressantes. Par contre le sujet a permis de relever chez certains candidats une mauvaise connaissance du cours et une confusion dans les objets manipulés mais surtout, pour beaucoup de candidats, des difficultés à produire des justifications complètes et détaillées (alors même que la situation envisagée semble comprise et connue par le candidat). Concernant les questions de programmation, on peut noter que la méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale est connue par de nombreux candidats mais ce n'est pas le cas de la méthode d'Euler. Notons que nous n'avons pas décelé sur ce sujet de problèmes techniques calculatoires chez la majorité des candidats.

Analyse des résultats par exercices.

Exercice 1. On étudiait dans cet exercice le commutant d'une matrice symétrique réelle en passant par sa réduction dans une base orthonormée. **Questions 1 et 2 :** le polynôme caractéristique et le spectre, ainsi que les sous-espaces propres, sont très souvent déterminées correctement. Par contre, il est très rare que les candidats répondent correctement à la question posée où l'on demande une matrice de passage orthogonale : ils se contentent en général de proposer la matrice construite directement à partir des vecteurs propres qu'ils ont obtenus. **Questions 3, 4 et 5:** ces questions sont en général correctement traitées, parfois avec une rédaction un peu trop succincte. **Question 6 :** cette question n'est presque jamais traitée correctement. De trop nombreux candidats font de plus une confusion sur la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est égale à 9, pas à 3). **Question 7 :** traitée souvent en partie par les candidats qui utilisent l'inclusion et l'égalité des dimensions mais oublient de justifier précisément que F est de dimension 3. **Question 8 :** cette question très facile a cependant posé problème à un certain nombre de candidats. **Question 9 :** cette question n'a presque jamais été traitée. Cependant, certains des rares candidats qui l'ont abordée ont proposé des solutions intéressantes et peu calculatoires.

Exercice 2. Dans cet exercice, on étudie des projections orthogonales dans un espace préhilbertien réel en lien avec une équation différentielle. **Question 1 :** la représentation graphique est souvent correcte mais les correcteurs sont parfois restés perplexes devant les graphiques proposés par certains candidats. **Question 2 :** en général traitée correctement par les candidats. **Question 3 :** la définition d'un produit scalaire est connue par beaucoup de candidats mais il manque trop souvent des arguments pour justifier le caractère défini-positif (on attendait que les propriétés de continuité et positivité de f^2 ainsi que le caractère 2π-périodique et impaire de f soient mentionnés). **Questions 4 :** la définition d'une famille orthogonale est parfois très mal connue (on a trouvé dans les copies des calculs de produits scalaires entre s_n et s_{n+1} ou alors entre s_n et un vecteur quelconque de E, de plus le calcul de la norme de s_n n'est pas nécessaire pour répondre à cette question). **Questios 5, 6 :** pas de commentaires particuliers. **Question 7 :** cette question a très rarement été traitée correctement. De plus, on trouve souvent dans les réponses la relation $v_2 = \langle v, s_1\rangle s_1 + \langle v, s_2\rangle s_2$ qui est fausse puisque la famille (s_1, s_2) n'est pas orthonormée. **Question 8 :** beaucoup d'étudiants ont une méthode correcte pour obtenir les solutions de ces équations différentielles. **Questions 9 et 10 :** la question 9 est généralement traitée correctement (à part quelques imprécisions dans la syntaxe Python), la question 10 est très souvent fausse. Les étudiants doivent faire l'effort de fournir des explications détaillées à côté des programmes qu'ils proposent dès que ceux-ci dépassent quelques lignes. **Question 11 :** de manière surprenante, il est très rare que cette question soit traitée correctement alors que la méthode d'Euler est au c$\frac{1}{2}$ur du programme de première année. On trouve de nombreuses confusions dans les réponses. **Questions 12 et 13 :** souvent mieux traitée que la question précédente.

Exercice 3. On étudie ici deux fonctions définies à l'aide d'une série et d'une intégrale dépendant d'un paramètre. **Questions 1 et 2 :** beaucoup d'étudiants abordent ces questions, mais très souvent les justifications sont insuffisantes. Par exemple pour la question 1, on ne peut pas se contenter d'une phrase lapidaire telle que « d'après Riemann l'intégrale converge ». On attendait ici que soient mentionnés la régularité de la fonction à intégrer, une relation de comparaison, l'intégrale de référence utilisée ainsi que le théorème de comparaison des fonctions intégrables. C'est le même principe pour la question 2. **Question 3 :** cette question est très rarement traitée correctement. Mis à part les erreurs dans l'utilisation du théorème, un certain nombre de candidats ne voient absolument pas ce qu'il y a à démontrer et considèrent simplement que F est une somme de fonctions de classe C^1, ce qui montre une très mauvaise compréhension des notions au programme. **Questions 4 et 5 :** en général traitées correctement par les candidats qui les abordent, il manque parfois quelques justifications. **Question 6 :** là encore, il manque souvent beaucoup trop de justifications. Pour les deux études en 0 et en $+\infty$, il est nécessaire de se ramener au théorème d'encadrement (théorème des gendarmes). **Question 7 :** en général traitée correctement par les étudiants qui l'abordent. **Questions 8 et 9 :** voir les commentaire des questions 1 et 2. **Question 10 :** souvent traitée correctement. **Question 11 :** il manque souvent la justification de la convergence de la série géométrique. **Question 12 :** beaucoup de candidats qui abordent cette question (après avoir traité les deux questions précédentes) comprennent que

$F = G$ mais très peu le justifient correctement (et surtout de trop nombreux candidats ne voient pas qu'il y a quelque chose à justifier).

Exercice 4 : cet exercice de probabilités n'a en général été abordé que très partiellement. Sur la question 1, on ne peut pas se contenter d'affirmer que X et Y suivent des lois binomiales. Pour X par exemple, il faut expliquer qu'elle représente le nombre de succès dans une suite de 4 épreuves de Bernoulli, indépentantes et de même probabilité de succès p. De même, il y a souvent un manque de rigueur dans l'application de la formule des probabilités totales : il y a des justifications à donner, on ne peut pas se contenter d'écrire le calcul.

Conseils aux futurs candidats. Il ressort de l'analyse des copies deux points très importants sur lesquels les futurs candidats peuvent progresser.

1. **Le cours :** pour un grand nombre de questions, c'est la première difficulté des candidats. On ne peut pas déterminer une matrice orthogonale, ou vérifier qu'une famille est orthogonale si l'on ne sait pas de quoi il s'agit. D'une certaine manière, lorsqu'un candidat déclare que la somme d'une série de fonctions est « dérivable comme somme de fonctions dérivables », c'est également un problème de connaissance du cours. On peut trouver d'autres exemples, par exemple en informatique où il faut connaitre et savoir appliquer précisément la méthode d'Euler. Nous encourageons donc les futurs candidats à connaitre très précisément leur cours, ce qui signifie : connaitre parfaitement les énoncés, savoir comment les appliquer mais aussi savoir dans quelles situations on doit les utiliser.

2. **Les justifications :** trop souvent, les candidats donnent des justifications trop partielles, alors même qu'ils ont compris les concepts utilisés ainsi que la démarche à mettre en $\frac{1}{2}$uvre. L'exemple type est celui de la convergence d'une série où le candidat se contente juste de signaler que le terme général est négligeable devant $1/n^2$: c'est bien entendu un élément essentiel de la réponse mais il manque d'autres points (la positivité, la série de référence considérée et sa nature, le résultat qui permet de conclure). Le même problème se rencontre en probabilités : il ne suffit pas de fournir des calculs mais il faut également donner les justifications qui les rendent légitimes. Pour changer de domaine, un programme informatique, dès qu'il dépasse quelques lignes, doit également comporter des justifications (au moins des explications). Rappelons que dans un sujet de concours, il ne faut pas juste de fournir une réponse finale à une question, il faut également produire tout l'argumentaire (et pas seulement les points clés) qui permet de l'obtenir. Il faut pour cela s'entrainer durant toute l'année à produire ces argumentaires, non pas en recopiant un corrigé type mais en faisant l'effort de comprendre et reproduire soi-même la démarche logique sous-jacente.