Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose une introduction à l'algèbre symplectique. Il est découpé en quatre parties.

Après une courte partie préliminaire constituée de deux questions classiques, la seconde partie introduit les notions de formes, d'orthogonalité et d'endomorphismes symplectiques. En particulier, le sujet permet de justifier qu'il existe un espace symplectique de dimension n si et seulement si n est pair. Cette partie se termine avec des caractérisations matricielles des endomorphismes symplectiques.

La troisième partie s'intéresse au déterminant d'une matrice symplectique. Par deux méthodes, on démontre qu'un tel déterminant est égal à 1. On utilise la décomposition polaire pour la première méthode, les transvections symplectiques pour la seconde.

La dernière partie est une introduction au problème de plongement symplectique (injection d'une boule dans un cylindre via un endomorphisme symplectique).

Analyse globale des résultats

La partie préliminaire, la partie II et la première moitié de la partie III sont abordées dans la plupart des copies. Les questions à partir de la question 30 n'ont été sérieusement abordées que par les meilleurs candidats.

Le jury a noté des efforts sur la présentation et la mise en forme des raisonnements. Malheureusement, cela ne concerne pas tous les candidats et un malus a été appliqué à certaines copies particulièrement mal écrites, mal présentées, ou lorsque la numérotation des questions manque de précision.

Le sujet a permis de classer correctement les candidats. Les premières questions, mais aussi un certain nombre de questions abordables dont le sujet était parsemé, ont permis de valoriser la connaissance du cours et la mise en œuvre des techniques de base. Ensuite, au fur et à mesure de l'épreuve, la difficulté et le nombre de questions ont permis de distinguer les meilleurs candidats.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Préliminaires

Si ces questions classiques ont été correctement traitées dans une majorité de copies, le jury a aussi constaté, dès la première question, des erreurs assez grossières sur la nature des objets manipulés (par exemple l'intervention de l'inverse ou du déterminant d'une matrice colonne X).

II Objets symplectiques

Q4. Cette question est l'occasion de rappeler que les objets utilisés dans un raisonnement doivent être correctement introduits. Il ne faut pas oublier de vérifier la non vacuité de F^w en donnant un argument précis.

Q5. Dans cette question, comme dans d'autres, une affirmation sans justification n'est pas valorisée. Le jury attendait ici un contre-exemple précis.

Le jury demande aux candidats de prendre un minimum de recul et de repérer les incohérences entre leurs réponses et le sujet : les personnes ayant répondu par l'affirmative à la question 5 doivent s'interroger sur le fait que l'on cherche, ensuite, une condition nécessaire et suffisante pour que la somme soit directe.

Q6. La démonstration nécessitait plusieurs arguments à avancer dans l'ordre : linéarité (en disant pourquoi d_w est linéaire), injectivité, égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée (l'argument vague « on est en dimension finie » n'est pas suffisant).

Q7. Prolonger un élément de $(F, \mathbb{R})$ par 0 sur $E \setminus F$ est le signe d'une dommageable confusion entre supplémentaire et complémentaire et d'une incompréhension certaine de l'algèbre linéaire.

Q13. Pour l'antisymétrie, dans un certain nombre de copies, le développement de $\langle x, j(y)\rangle$ à l'aide des coordonnées a permis de conclure convenablement. Le calcul matriciel était plus efficace mais il fallait alors justifier précisément pourquoi un produit du type $X^\top JY$ est égal à sa transposée.

Q16. Dans un nombre significatif de questions, la vérification de l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est oubliée.

Le jury note quelques erreurs sur la transposée d'un produit ainsi que des confusions sur la loi de composition qui donne une structure de groupe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q17. Dans cette question, comme dans certaines autres, rappelons qu'une équivalence ne se démontre pas comme une seule implication.

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

Q18. De même, pour la démonstration d'une égalité d'ensembles $A = B$, commencer par « Soit $x \in A$,... » ne peut que conduire à une inclusion.

Q21. La compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, même s'il s'agit d'un exercice classique, n'est pas un résultat au programme officiel. Cela doit donc être démontré avant d'être utilisé.

Le déterminant d'un matrice orthogonale est égal à 1 ou à -1 mais cela ne caractérise pas l'orthogonalité d'une matrice.

Q24. Cette question délicate a permis aux meilleurs candidats d'exprimer leur compréhension du sujet.

Q29. La plupart des candidats ayant traité cette question ont bien tenu compte de l'objectif indiqué en préambule de la partie III et ne se sont pas appuyés sur la question 26, même si l'énoncé n'avait pas explicitement interdit ce recours. Le jury les en félicite.

Conseil généraux

La lecture des copies conduit le jury a émettre quelques conseils généraux.

- Ne pas se précipiter et prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires. Par exemple, dans **Q4**, ne pas oublier de dire pourquoi F^w est non vide, justifier l'inversibilité de J avant de l'utiliser.

  Il faut savoir être concis et précis ; ce qui ne signifie pas d'abuser des abréviations.
- Faire attention à la nature des différents objets : matrices carrées, matrices colonnes, endomorphismes, vecteurs, scalaires...
- Clairement identifier les différents types de raisonnement, en particulier, équivalence et double implication.
- Prendre du recul sur les résultats et vérifier qu'ils ne sont pas incohérents avec des résultats précédents.
- Ne pas utiliser des notions ou des résultats hors programme. Comme indiqué ci-dessus, il n'est pas possible d'utiliser la compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sans la redémontrer. De même, il n'était pas nécessaire

de parler d'espace dual dans ce sujet. Les notions d'endomorphisme antisymétrique ou de matrice symétrique définie positive ne figurant pas au programme, les mobiliser sans plus d'explication ne peut constituer une réponse acceptable.

En revanche, il est inutile de redémontrer des résultats de cours, comme le fait que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ soit un groupe.

Conclusion

Comme les années précédentes, les correcteurs ont été impressionnés par les quelques candidats arrivant à traiter quasiment intégralement le sujet. La majorité des candidats montrent qu'ils ont travaillé avec application durant leurs deux années de CPGE et qu'ils parviennent à se saisir en temps contraint d'une situation mathématique nouvelle et à mobiliser leur connaissance des notions et techniques au programme pour avancer, chacun à son rythme, dans la compréhension des premiers enjeux de la géométrique symplectique.

Cela ne doit pas inciter à répondre précipitamment aux premières questions. Il faut absolument apporter des réponses complètes et précises même si cela empêche d'aller très loin dans le sujet. Quoi qu'il en soit, le jury attend des réponses honnêtes et cohérentes entre elles même si elles ne sont que partielles.

Le sujet était long avec quelques questions délicates mais assez peu de très difficiles. Des réponses correctes aux 25 premières questions constituent déjà une très bonne copie.