MP

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

1/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Ce sujet proposait deux exercices et un problème tous indépendants.

Le premier exercice portait sur la géométrie euclidienne (produit scalaire, projection, distance) avec une touche d'analyse, puisque le produit scalaire utilisé était une intégrale généralisée. Pour la dernière question, certains candidats n'ont pas vu le lien avec les questions précédentes et l'ont traitée (plus ou moins bien) comme un problème d'optimisation, utilisant point critique et dérivées partielles.

Le deuxième exercice, portant sur les variables aléatoires, proposait de déterminer la loi de la variable aléatoire $\sup(X,Y)$ pour X et Y variables aléatoires indépendantes données par l'énoncé.

Enfin, le problème mettait en place la décomposition spectrale d'un endomorphisme. Il comprenait des questions proches du cours et d'autres un peu plus calculatoires. Il n'y avait pas vraiment de questions astucieuses, sauf éventuellement la dernière. Les prérequis du cours étaient notamment la connaissance du polynôme minimal et du polynôme caractéristique, le théorème de Bézout, le théorème de Cayley Hamilton et le lemme des noyaux dont la démonstration était demandée.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Le sujet a été compris par une grande partie des candidats. Ils ont su laisser de côté les questions plus difficiles pour aborder l'ensemble du sujet et valoriser leurs compétences.

Un élève qui a préparé les exercices de la banque et a compris son cours était capable de dépasser la moyenne.

Le sujet est classant et met en évidence la qualité de la préparation des candidats et la compréhension du cours.

Une déception est apparue sur les résultats des deux exercices, pourtant classiques, qui n'ont pas assez rapporté de points. Trop peu de candidats pensent à utiliser les questions déjà traitées et quand ils le font, ils manquent de rigueur en oubliant de vérifier les hypothèses qui justifient l'utilisation du résultat.

On note une grande présence d'abréviations et une mauvaise utilisation des connecteurs logiques.

La tenue des copies est en général correcte. Les correcteurs étaient invités à porter une attention toute particulière au soin et à la présentation.
Les candidats sont vivement encouragés à souligner ou encadrer les résultats. Dans le cas contraire, le candidat est sanctionné.

C'est un sujet qui a permis de bien évaluer et classer les candidats. La moyenne est de 10,00/20 et l'écart-type de 3,95 est élevé ; on rencontre tous types de notes.

2/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE 1

Q1. L'existence du produit scalaire est souvent oubliée par les candidats. Le caractère défini n'est pas bien traité et beaucoup oublient que l'argument de P possède une infinité de racines donc que P est le polynôme nul.

Q2. Cette question concerne la formule de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel. Les candidats ont tendance à mal connaître cette formule, ce qui peut entraîner des erreurs dans les calculs.

Q3. Pour le calcul de l'inf, certains candidats perdent beaucoup de temps à étudier une fonction à deux variables. Cette question est une application des projections orthogonales, elle a conduit à des réponses assez farfelues comme par exemple des distances négatives ou des vecteurs orthogonaux à leur projeté !
Pour beaucoup X^2 est orthogonal à son projeté orthogonal. Certains pensent, à tort, qu'il y a une erreur dans la question (et remplacent le signe – par +).

EXERCICE 2

La formule des probabilités totales n'est pas souvent énoncée clairement ni le système complet d'événements.

Q4. Certains étudiants ne sont pas du tout inspirés par cet exercice et passent directement au problème. L'énoncé guidait pourtant bien en suggérant de distinguer les 3 cas. Dans la plupart des copies, la probabilité nulle dans le cas $n > m$ est trouvée (mais pas toujours justifiée). Pour le cas $m = n$, certains candidats trouvent mais éprouvent le besoin de sommer sur n trouvant alors un résultat qui ne dépend plus de n…
À signaler aussi quelques étourderies du genre oubli du carré de p… alors que le résultat est bien justifié. Pour le cas $m > n$, la principale erreur est l'absence du 2 provenant de la probabilité de l'union de deux événements disjoints. En effet, certains candidats calculent séparément les probabilités dans le cas $X < Y$ et dans le cas $X > Y$, trouvent la même chose et concluent alors que

ce résultat est vrai dans les deux cas… Heureusement, il reste de nombreuses copies où cette question est correcte et parfaitement rédigée.

Q5. Les candidats les plus faibles affirment qu'il s'agit de la loi géométrique, sans même avoir traité **Q4**. La plupart du temps, la loi de Z comme loi marginale du couple (Z, T) ou bien le théorème des probabilités totales sont évoqués et la somme est bien faite sur n. **Q4** est alors utilisée mais un nombre non négligeable de candidats somment de m à $+\infty$ au lieu de sommer de 0 à m.
À signaler aussi ceux qui somment sur n et obtiennent un résultat qui dépend encore de n. Pour ceux qui séparent bien en 3 sommes (dont l'une est nulle et l'autre n'a qu'un terme), l'une des sommes va de 0 à $m-1$ et très peu de candidats ont l'idée de traiter à part le cas $m = 0$.
Signalons enfin quelques candidats qui ne s'occupent pas de **Q4** et qui obtiennent le résultat en calculant la fonction de répartition $P(Z \leq m)$ puis en écrivant $P(Z = m) = P(Z \leq m) - P(Z \leq m-1)$ (ils ont probablement fait cet exercice ainsi durant l'année…).

PROBLÈME

Q6. Il y a très peu d'erreurs sur cette question. Certains ne calculent pas les carrés des matrices de projecteur. Il y a aussi des erreurs sur le polynôme caractéristique.

Q7. Un nombre important d'étudiants ont manqué de rigueur dans la manipulation de la notion de polynômes d'endomorphismes et/ou dans les écritures proposées.
Quelques erreurs :
$Ker(P)$
$(PQ)(u)(x) = P(u)(x)Q(u)(x)$
$Ker(Q(u)) \cap Ker(P(u)) = \emptyset$.

Q8. Question souvent très bien traitée mais certains candidats, au lieu de dire que P_1^k et P_2^k sont premiers entre eux avant d'appliquer le théorème de Bézout, ont appliqué directement le théorème sur P_1 et P_2 puis ont ensuite essayé de manipuler la formule pour arriver à ce qui est demandé en vain.

Q9. Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à écrire proprement que $p_i \circ p_j$ est un multiple du polynôme minimal évalué en u donc nul.
La somme égale à l'identité est évidente d'après la **Q8** donc a été très bien traitée.
Pour montrer que les p_i sont des projecteurs, bon nombre de candidats ont utilisé la bonne méthode mais beaucoup ont également voulu repartir de la définition des p_i et n'ont pas abouti leurs calculs.

Q10. Question de cours classique souvent bien traitée mais quelques candidats oublient tout de même d'indiquer que les polynômes sont deux à deux premiers entre eux pour pouvoir appliquer le lemme des noyaux ou encore certains qui ne justifient pas que le noyau du polynôme caractéristique évalué en u est l'espace entier d'après le théorème de Cayley Hamilton.

Q11. La somme directe d'une somme de plus de deux espaces vectoriels n'est pas maîtrisée.

Q12. Question peu réussie, de graves erreurs, un argument parfois utilisé est : la décomposition de E est unique donc $\operatorname{Im} p_i = N_i$.

Q13. Justifications trop souvent absentes.

Q14. D'une part, la décomposition en éléments simples n'a pas été souvent bien établie et, d'autre part, beaucoup de candidats ont cherché à démontrer que les applications p_i vérifiaient les 3 résultats de la **Q9**.

Q15. Les candidats pensent à utiliser le fait que deux polynômes qui coïncident en davantage de valeurs que leur degré sont égaux. La deuxième partie de la question a été abordée par quasiment tous les candidats en admettant la première partie de question.

Q16. Bien dans l'ensemble, même si certains étudiants n'explicitent pas les projecteurs associés à A. En **c)** les candidats pensent à appliquer la formule du binôme de Newton.

Q17. Certains ont évoqué le cours sans rien démontrer.

Q18. Cette question est plutôt bien traitée par ceux qui l'on abordée, soit en montrant la liberté d'une famille de cardinal m, soit en montrant le caractère générateur d'une famille de cardinal m, soit en montrant que la famille est libre et génératrice.

Q19. Parmi les candidats qui abordent cette question, certains répondent « oui » ou « non » sans argumenter. D'autres se trompent, en écrivant que la diagonalisabilité n'a pas été utilisée dans **Q18**, oubliant que le degré du polynôme minimal est strictement supérieur à m dans le cas. Certains autres donnent la bonne réponse mais un mauvais argument (famille non libre au lieu de famille non génératrice). Il y a quand même parfois de très bonnes rédactions de cette question.

Q20. Gros manque de rigueur chez les candidats qui décident de traiter la question. Question mal traitée dans l'ensemble.

3/ CONCLUSION

L'attention des candidats est attirée par le fait que les sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.