1 - "Rappels" sur les fractions continues

Les faits suivants sont tout à fait basiques en théorie des fractions continues. Si les définitions sont ingénieuses, les démonstrations (la démonstration en fait, il y a un seul énoncé significatif) ne contiennent pas d'astuces particulières : il s'agit simplement d'accumuler des démonstrations par récurrence, en les faisant dans le bon ordre.

Sans prétendre que cette source soit excellente, j'ai tout de même apprécié :

`http ://www.math.uni-frankfurt.de/ steuding/steuding/dioph.pdf`

que j'ai utilisé comme référence des formules utiles, depuis chez moi.

Pour l'exercice qui nous intéresse, on va utiliser le développement en fractions continues de 2π. Il est construit comme suit :

On définit par récurrence des réels α_n et des entiers a_n en posant :

$$\alpha_0 = 2\pi, \text{ et, pour tout } n \geq 0, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \text{ (cette notation désigne la partie entière) puis } \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

Ainsi chaque α_n est un réel (irrationnel) strictement supérieur à 1 et chaque a_n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose ensuite :

$$\begin{matrix} p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1 \\ q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0 \end{matrix} \quad \text{puis pour tout } n \geq -1 \quad \begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}.$$

À partir de cette définition on peut déjà faire la :

Remarque 1 : la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

La formule suivante sera fondamentale :

Formule : pour tout $n \geq -1$,

$$2\pi q_n - p_n = \frac{(-1)^n}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}. \qquad (*)$$

Principe de la vérification : ça se montre par récurrence (voir la référence proposée page 21) ; on y parviendra en montrant (indépendamment) par récurrence les formules :

$$\frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} = 2\pi \qquad (n \geq -1)$$

et

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \qquad (n \geq -1).$$

La formule à vérifier découle facilement de ces deux faits.

•

Dans la suite, on va noter $l_n = |2\pi q_n - p_n|$; il n'est peut-être pas inutile d'en expliquer la signification : la quantité l_n, qui est petite au vu de la formule ci-dessus, représente la longueur de l'arc (le plus court) joignant les deux points $e^{2i\pi q_n} = 1$ et e^{ip_n}. Dit autrement, la formule garantit que pour les valeurs particulières p_n, avancer de p_n radians sur le cercle-unité, c'est faire à peu près un nombre entier de tours, la quantité l_n quantifiant précisément l'erreur derrière ce "à peu près".

De la formule $(*)$ (en se souvenant que a_n est la partie entière de α_n) on déduit aussitôt que :

$$\frac{1}{(a_{n+1}+1) q_n + q_{n-1}} < l_n < \frac{1}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

soit

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} < l_n < \frac{1}{q_{n+1}}$$

donc

$$\frac{1}{q_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+2}q_{n+1}+q_n}\leq\frac{1}{q_{n+1}+q_n}<l_n<\frac{1}{q_{n+1}}.$$

Ceci permet de faire la
Remarque 2 : la suite $(l_n)_{n\geq -1}$ est strictement décroissante.
Enfin, en divisant la majoration de l_n par l'entier q_n, on fait sans mal la
Remarque 3 : p_n/q_n tend vers 2π quand n tend vers $+\infty$.

2 - Points tournant sur un cercle

La proposition qui suit est un extrait de faits "bien connus" (mais dont je ne connais pas de référence) sur la suite des $e^{ik\beta}$ pour un β non multiple rationnel de π (ici pour $\beta=1$). Je ne démontre qu'un énoncé minimal suffisant pour notre exercice, en ajoutant quelques informations en remarques.
Proposition : soit $n\geq 0$ un entier fixé. Considérons les p_n points du cercle unité :

$$e^i,\ e^{2i},\ e^{3i},\ \ldots,e^{p_n i}.$$

Les p_n arcs de cercle délimités par ces p_n points sont tous de longueur strictement inférieure à $2l_{n-1}$.
Démonstration :

(la démonstration est écrite ci-dessous pour n pair ; si n est impair, on remplacera "vers l'avant" par "vers l'arrière" et on ajoutera quelques signes "moins" de ci de là).

Soit k un entier compris entre 1 et p_n. On va majorer la longueur de l'arc de cercle issu de e^{ik} et partant vers l'avant dans le sens trigonométrique. Pour cela on procède différemment selon la position de k

• Si $1\leq k\leq(a_n-1)p_{n-1}+p_{n-2}$.

Dans ce cas, on pose $k'=k+p_{n-1}$. Vu la majoration de k, on majore aussi $k'\leq a_np_{n-1}+p_{n-2}=p_n$. Le point $e^{k'i}$ est donc aussi un des points de la collection considérée.

Un argument de $e^{k'i}$ est $k'-2\pi q_{n-1}$; un argument de e^{ki} est k. La différence de ces deux réels vaut $(k'-k)-2\pi q_{n-1}=p_{n-1}-2\pi q_{n-1}=l_{n-1}$. Ce réel est plus petit ou égal que $l_{-1}=1$ donc plus petit que 2π, c'est donc la longueur de l'arc joignant e^{ki} à $e^{k'i}$. Cette longueur majore à son tour la longueur de l'arc issu de e^{ki} faisant partie du découpage étudié.

• Si $(a_n-1)p_{n-1}+p_{n-2}+1\leq k\leq p_n$.

Cette fois, on pose $k'=k+p_{n-1}-p_n$. L'encadrement de k peut se réécrire $p_n-p_{n-1}+1\leq k\leq p_n$, donc $1\leq k'\leq p_{n-1}$ et là encore $e^{k'i}$ est un des points de la collection considérée.

Un argument de $e^{k'i}$ est $k'-2\pi q_{n-1}+2\pi q_n$; un argument de e^{ki} est k. La différence de ces deux réels vaut $(k'-k)-2\pi q_{n-1}+2\pi q_n=(p_{n-1}-2\pi q_{n-1})+(2\pi q_n-p_n)=l_{n-1}+l_n<2l_{n-1}$ (en utilisant la remarque 2 de la première partie pour l'inégalité finale). Comme dans le premier cas, on a ainsi majoré la longueur de l'arc du découpage issu de e^{ik}.

•

Remarque culturelle : on pourrait montrer sans trop de mal que l'arc joignant e^{ik} à $e^{ik'}$ est effectivement l'arc du découpage commençant à e^{ik}. On connaît donc effectivement la longueur de celui-ci et on sait bien plus que la simple majoration annoncée : les arcs du découpage sont de deux tailles seulement ; la majorité -à savoir $(a_n-1)p_{n-1}+p_{n-2}$ d'entre eux- est de longueur l_{n-1} ; une petite minorité -les p_{n-1} restants- sont légèrement plus longs, de longueur $l_{n-1}+l_n$. On peut aussi dire des choses intéressantes même sur une suite de longueur arbitraire d'exponentielles consécutives ; dans ce cas il peut y avoir jusqu'à trois longueurs d'arcs distinctes dans le découpage, mais jamais davantage.
Corollaire : Soit $n\geq 0$. Soit I un arc du cercle-unité de longueur $2l_{n-1}$ et soit $a+1,a+2,\ldots,a+p_n$ une succession de p_n entiers consécutifs. Alors un des p_n points $e^{i(a+1)}$, $e^{i(a+2)},\ldots,$ $e^{i(a+p_n)}$ du cercle-unité appartient à l'arc I.
Démonstration : Si $a=0$, cela découle immédiatement de la proposition précédente. Sinon il suffit d'infliger à toute la figure une rotation d'angle $-a$, et on est ramené au cas où $a=0$.

•

3 - Et l'exercice alors ? J'y viens

Pour chaque $n \geq 0$, on appellera I_n l'arc du cercle-unité centré en $-i = e^{3i\pi/2}$ et de longueur $2l_{n-1}$.

On va minorer la somme (finie ou infinie) de la série à étudier par

$$S_n = \sum_{k \mid e^{ik} \in I_n} \frac{1}{k^{2+\sin k}}.$$

Parce que I_n a précisément été choisi pour ça, lorsque $e^{ik} \in I_n$,

$$\sin k \leq -\cos l_{n-1} \leq \frac{l_{n-1}^2}{2} - 1.$$

En utilisant cette majoration commune de tous les exposants figurant dans la définition de S_n, on écrit la minoration :

$$\sum_{k \mid e^{ik} \in I_n} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} \leq S_n.$$

Découpons alors cette somme infinie en paquets comme suit :

$$\sum_{\substack{k \mid e^{ik} \in I_n \\ 1 \leq k \leq p_n}} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} + \sum_{\substack{k \mid e^{ik} \in I_n \\ p_n+1 \leq k \leq 2p_n}} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} \sum_{\substack{k \mid e^{ik} \in I_n \\ 2p_n+1 \leq k \leq 3p_n}} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} + \cdots \leq S_n.$$

Le corollaire qui a clôturé la deuxième partie garantit que chacune des sommes apparaissant dans cette formule contient au moins un sommant. En minorant pour chaque somme $1/k$ par l'inverse de la plus grande valeur de k susceptible d'y figurer, on obtient :

$$\frac{1}{p_n^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} + \frac{1}{(2p_n)^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} + \frac{1}{(3p_n)^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} + \cdots \leq S_n,$$

soit

$$\frac{1}{p_n^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}} \zeta(1 + \frac{1}{2}l_{n-1}^2) \leq S_n.$$

Là dedans, la minoration $l_{n-1} \leq l_{-1} = 1$ permet de minorer le premier facteur, très grossièrement, en écrivant :

$$\frac{1}{p_n^{3/2}} \leq \frac{1}{p_n^{1+\frac{1}{2}l_{n-1}^2}}.$$

Pour le second facteur, on minore classiquement ζ par comparaison sommes-intégrales :

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} t^{-s}\, ds \leq \zeta(s).$$

Ces deux minorations réunies nous fournissent la minoration enfin lisible :

$$2 \frac{1}{p_n^{3/2} l_{n-1}^2} \leq S_n.$$

On va enfin repêcher la majoration de l_{n-1} de la fin de la première partie, et on obtient :

$$2 \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{-3/2} \sqrt{q_n} \leq S_n.$$

Or ce majorant tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$. C'est donc que la série étudiée diverge.