

CONCOURS D'ADMISSION 2001

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

## Première partie

On désigne par  $S$  le plan complexe  $\mathbf{C}$  privé du sous-ensemble  $-\mathbf{N} - 1/2 = \{-1/2, -3/2, \dots\}$ . Pour tout  $s$  dans  $S$  on note  $(E_s)$  l'équation différentielle

$$2x(1-x)f''(x) + (2s+1 - (2s+3)x)f'(x) - sf(x) = 0.$$

On cherche une solution de  $(E_s)$  sous la forme d'une série entière

$$f_s(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(s)x^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1.$$

1. Écrire  $a_{n+1}(s)$  en fonction de  $a_n(s)$ .

2. Déterminer la limite de  $\frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}$  lorsque  $s$  n'est pas un entier négatif ou nul.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1 ou à  $+\infty$  et que sa somme  $f_s(x)$  est effectivement une solution de  $(E_s)$ .

4. Montrer que la fonction  $(s, x) \mapsto f_s(x)$  est continue sur  $S \times ]-1, 1[$ .

5. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E'_s) \quad t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t) + s(1-s)(1-t^2)F(t) = 0 \quad , \quad t \in ]0, 1[.$$

a) Ramener sa résolution à celle de  $(E_s)$  en cherchant  $F(t)$  sous la forme  $t^s f(t^2)$ . [On rappelle que  $\frac{dt^s}{dt} = st^{s-1}$ .]

b) Montrer que, si  $s$  n'appartient pas à  $\mathbf{Z} + 1/2$ , les fonctions  $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$  et  $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$  forment une base de l'espace des solutions de  $(E'_s)$ .

## Deuxième partie

On désigne par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des nombres complexes  $z = x + iy$  tels que  $y > 0$ ; on pose  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$ .

6. Démontrer les résultats suivants :

a) Pour tout  $z \in \mathcal{H}$  et tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , le nombre complexe  $\frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{H}$  (on précisera sa partie imaginaire).

b) Si l'on pose  $A_\theta(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$ , on obtient une action du groupe additif  $\mathbf{R}$  sur  $\mathcal{H}$ .

c) La fonction réelle sur  $\mathcal{H} : z \mapsto c(z) = \frac{|z|^2 + 1}{2 \operatorname{Im} z}$  est invariante par les transformations  $A_\theta$ , c'est-à-dire  $c(A_\theta(z)) = c(z) \quad \forall z \in \mathcal{H}, \forall \theta \in \mathbf{R}$ .

d) Si  $z$  est différent de  $i$ , on a  $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$  si et seulement si  $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$ .

7. On fixe un point  $z_0$  de  $\mathcal{H}$ , distinct de  $i$ .

a) Vérifier que l'orbite de  $z_0$  sous l'action du groupe  $\mathbf{R}$  est incluse dans le cercle de centre  $ic(z_0)$  et de rayon  $(c(z_0)^2 - 1)^{1/2}$ .

b) Montrer que l'orbite de  $z_0$  est égale à ce cercle.

8. On définit une application indéfiniment différentiable  $U$  de  $]0, 1[ \times \mathbf{R}$  dans  $\mathcal{H}$  par  $U(t, \theta) = A_\theta(it)$ .

a) Calculer le déterminant jacobien de  $U$ , qu'on notera  $J(t, \theta)$ .

[On utilisera la formule  $J(t, \theta) = \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$ .]

b) Démontrer les assertions suivantes :

- (1)  $U(]0, 1[ \times \mathbf{R})$  est égal à l'ensemble  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$  privé du point  $i$ ;
- (2) on a  $U(t, \theta) = U(t', \theta')$  si et seulement si  $t = t'$  et  $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$ .

### Troisième partie

On désigne par  $C^\infty(\mathcal{H}')$  l'espace des fonctions complexes de classe  $C^\infty$  sur  $\mathcal{H}'$  et par  $C^\infty(]0, 1[ \times \mathbf{R})_{\text{per}}$  celui des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $]0, 1[ \times \mathbf{R}$  qui sont périodiques de période  $\pi$  par rapport à  $\theta$ .

**9.** Montrer qu'en associant à toute fonction  $\varphi$  de  $C^\infty(\mathcal{H}')$  la fonction  $\psi = \varphi \circ U$ , on obtient un isomorphisme, qu'on notera  $V$ , de  $C^\infty(\mathcal{H}')$  sur  $C^\infty(]0, 1[ \times \mathbf{R})_{\text{per}}$ .

On considère l'opérateur différentiel sur  $\mathcal{H}'$  défini par

$$D = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) ;$$

on admettra que, pour toute  $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$  et tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a  $D(\varphi \circ A_\theta) = D(\varphi) \circ A_\theta$ .

On désigne par  $\tilde{D}$  l'endomorphisme de  $C^\infty(]0, 1[ \times \mathbf{R})_{\text{per}}$ , défini par

$$\tilde{D} = V \circ D \circ V^{-1} .$$

**10.** Pour tout élément  $(t, \theta')$  de  $]0, 1[ \times \mathbf{R}$  et tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , on pose :

$$\tau_\theta(t, \theta') = (t, \theta + \theta') .$$

Vérifier que l'on a :

**a)**  $V(\varphi) \circ \tau_\theta = V(\varphi \circ A_\theta)$  pour  $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ .

**b)**  $\tilde{D}(\psi \circ \tau_\theta) = \tilde{D}(\psi) \circ \tau_\theta$  pour  $\psi \in C^\infty(]0, 1[ \times \mathbf{R})_{\text{per}}$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ .

On désigne par  $s$  un nombre complexe et par  $\varphi_s$  la fonction sur  $\mathcal{H}$  définie par

$$\varphi_s(z) = \int_0^\pi (\text{Im } A_\theta(z))^s d\theta .$$

**11.** Montrer que  $\varphi_s$  est de classe  $C^\infty$ , est invariante par les  $A_\theta$ , et est solution de l'équation  $D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s$ .

[On pourra considérer la fonction  $\omega(z) = (\text{Im } z)^s$ .]

**12.** On définit une fonction  $F_s$  sur  $]0, +\infty[$  par  $F_s(t) = \varphi_s(it)$ .

Comparer  $F_s(t)$  et  $F_s\left(\frac{1}{t}\right)$ .

**13.** Montrer que  $F_s = F_{1-s}$ .

[On pourra faire le changement de variable  $\cotan \theta = u$  dans l'intégrale définissant  $F_s(t)$ ].

On suppose maintenant que  $s$  n'appartient pas à  $\mathbf{Z} + 1/2$ .

On pourra admettre que, si une fonction  $\psi$  est de la forme  $\psi(t, \theta) = F(t)$ , on a

$$\tilde{D}(\psi)(t, \theta) = \frac{1}{1-t^2} [t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t)] .$$

**14.** Démontrer l'existence d'une famille de nombres complexes  $\lambda_s$  tels que l'on ait

$$F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s} \Phi_{1-s}$$

(les fonctions  $\Phi_s$  et  $\Phi_{1-s}$  ont été définies à la question **5.b**).

**15.** Supposant  $\operatorname{Re} s < 1/2$ , exprimer  $\lambda_s$  sous la forme d'une intégrale sur l'intervalle  $]0, \pi[$ .

**Nota :** L'ensemble  $\mathcal{H}$  est appelé *demi-plan de Poincaré* et est le cadre d'une géométrie non euclidienne; les transformations  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  ( $a, b, c, d$  réels et  $ad - bc = 1$ ) jouent un rôle analogue à celui des déplacements du plan euclidien, les transformations  $A_\theta$  un rôle analogue à celui des rotations. Enfin l'opérateur différentiel  $D$  est l'analogue du laplacien.

\* \*  
\*