Polytechnique 2001 PC - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : algèbre linéaire, diagonalisation, matrices symplectiques, produit scalaire

Commentaires : Il s'agit d'une épreuve difficile, qui comporte beaucoup de questions ouvertes (principalement dans sa première partie). On rencontre aussi des subtilités autour de la diagonalisation de matrices et d'endomorphismes réels dans $\mathbb{C}$.

Première Partie

1.a. Remarquons d'abord que J est inversible (son déterminant vaut 1). On a donc : $(\det M)^2 \det J = \det J$, et $\det M = \pm 1$.

1.b.
1. I_{2m} est symplectique.
2. Si A et B sont symplectiques, alors :
$$^t(AB)JAB = ^tB^tAJAB = J$$
3. Si A est symplectique (en particulier A est inversible), alors $^t(A^{-1})JA^{-1} = (^tA)^{-1}JA^{-1}$. Maintenant, $^tAJA = J \implies (^tA)^{-1}JA^{-1} = J$, et donc A^{-1} est symplectique.

En conclusion, l'ensemble des matrices symplectiques est un groupe pour la multiplication.

1.c. Remarquons que $J^{-1} = ^tJ$. Ceci prouve que J est symplectique.

1.d. Nous avons :

$$\begin{aligned} AJ^tA &= {}^t(A^tJ^tA) \\ &= {}^t(AJ^{-1}\ {}^tA) \\ &= {}^t((A^{-1})^{-1}J^{-1}(^tA^{-1})^{-1}) \\ &= {}^t(^tA^{-1}JA^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Comme l'inverse d'une matrice symplectique est symplectique, la transposée d'une matrice symplectique est elle-aussi symlectique.

2.a. Calculons :

$$\begin{aligned} ^tMJM &= \begin{pmatrix} ^tA & ^tC \\ ^tB & ^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -^tAC + ^tCA & -^tAD + ^tCB \\ -^tBC + ^tDA & -^tBD + ^tDB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

M est symplectique si et seulement si :

i) $-^tAC + ^tCA = 0$.

ii) $-^tAD + ^tCB = -I_m$.

iii) $-{}^tBC+{}^tDA=I_m$.
iv) $-{}^tBD+{}^tDB=0$.

Les conditions *ii)* et *iii)* sont identiques, tandis que *i)* et *iv)* se retraduisent en ${}^tAC$ et ${}^tBD$ sont symétriques.

2.b. Si une telle matrice existe, on a :

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q=BD^{-1}$. Refaire le produit prouve que M s'écrit sous la forme demandée. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\det M &= \det(A-QC)\det(D)\\ &= \det({}^tA-{}^tC{}^tQ)\det(D)\\ &= \det({}^tAD-{}^tC{}^tD^{-1}\,{}^tBD).\end{aligned}$$

Comme ${}^tBD$ est symétrique,

$$\begin{aligned}\det M &= \det({}^tAD-{}^tC{}^tD^{-1}\,{}^tDB)\\ &= \det({}^tAD-{}^tCB)=1.\end{aligned}$$

2.c. D'une part, $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2)=(s_1\underline{B}v_1|\underline{D}v_2)=s_1(\underline{B}v_1|\underline{D}v_2)$. D'autre part : $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2)=(\underline{D}v_1|s_2\underline{B}v_2)$. Comme ${}^tBD$ est symétrique, $(\underline{B}v_1|\underline{D}v_2)=(\underline{D}v_1|\underline{B}v_2)$, et donc $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2)=0$.

2.d. En exploitant $\underline{D}v=0$ et $\underline{B}v=0$, on trouve que :

$${}^tMJM\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais comme M est symplectique, ceci vaut aussi :

$$J\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on trouve que v est nul.

Prouvons maintenant qu'il existe s dans $\mathbb{R}$ avec $D-sB$ inversible (question difficile!). Nous commençons par prouver que si $s_1,\dots,s_p$ sont des réels distincts, non nuls, alors les sevs $Ker(D-s_1B)$, $Ker(D-s_2B)$,..., $Ker(D-s_pB)$ sont en somme directe. En effet, si $x_i\in Ker(D-s_iB)$, et $x_1+\cdots+x_p=0$, on applique $\underline{D}$, puis on prend le produit scalaire par $\underline{D}(x_p)$. On obtient :

$$(\underline{D}(x_1)|\underline{D}(x_p))+\cdots+(\underline{D}(x_p)|\underline{D}(x_p))=0.$$

Mais, pour $i\leq p-1$, on a $(\underline{D}(x_i)|\underline{D}(x_p))=0$ en vertu de la question 2.c. On en déduit que $\underline{D}(x_p)=0$. Mais comme $\underline{D}(x_p)-s_p\underline{B}(x_p)=0$, on a aussi $\underline{B}(x_p)=0$, et donc $x_p=0$. Le même raisonnement montre que les autres x_i sont aussi nuls.

Maintenant, il est aisé de conclure. Les sous-espaces vectoriels $Ker(D-s_iB)$ étant en somme directe, il en existe au plus n qui sont non-triviaux (de dimension supérieure ou égale à 1). Si s est réel non nul distinct de ceux-là, on a $Ker(D-sB)=\{0\}$ et $\underline{D}-s\underline{B}$ est inversible.

Déduisons-en que $\det M=1$. D'abord,

$$N=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$$

est clairement symplectique, donc NM aussi (cf question 1.b.). Mais,

$$NM=\begin{pmatrix} * & * \\ * & D-sB \end{pmatrix}.$$

D'après la question 2.b., $\det NM=1$. Comme $\det N=1$, on obtient que le déterminant de toute matrice symplectique est égal à 1.

3.a. Soit M une matrice symplectique, que l'on écrit sous la forme $M = J^{-1}({}^tM)^{-1}J$. Si $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$, on désigne par P_A son polynôme caractéristique. Rappelons que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et que le polynôme caractéristique d'une matrice et de sa transposée sont identiques. Nous avons alors :

$$P(\lambda) = P_{J^{-1}({}^tM)^{-1}J}(\lambda) = P_{({}^tM)^{-1}}(\lambda) = P_{M^{-1}}(\lambda).$$

Mais,

$$\begin{aligned} P_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(M^{-1} - \lambda I_{2m}) \\ &= \det\big(M^{-1}(I_{2m} - \lambda M)\big) \\ &= \det(M^{-1})\det\big(-\lambda(M - \frac{1}{\lambda}I_{2m})\big) \\ &= (-\lambda)^{2m}\det\big(M - \frac{1}{\lambda}I_{2m}\big) \\ &= \lambda^{2m}P(1/\lambda). \end{aligned}$$

3.b. Rappelons que λ_0 est valeur propre de multiplicité d de M si et seulement si λ_0 est racine de multiplicité d de P. Il suffit de prouver le résultat demandé pour $\frac{1}{\lambda_0}$ et $\overline{\lambda_0}$:

- Pour $\overline{\lambda_0}$: P est à coefficient réels, si λ_0 est racine de multiplicité d de P, $\overline{\lambda_0}$ aussi!
- Pour $\frac{1}{\lambda_0}$: C'est une application directe de a.

3.c Rappelons que $\det M = 1$. Si d est la multiplicité de -1, on a :

$$(-1)^d \prod_{\substack{\lambda_i \text{vp} \\ \lambda_i \neq 1,-1}} \lambda_i^d = 1.$$

Maintenant, on regroupe dans le produit chaque valeur propre avec son inverse qui est de même multiplicité, et $\frac{1}{\lambda_i^d}\lambda_i^d = 1$. On trouve donc : $(-1)^d = 1$, et donc -1 est de multiplicité paire.
Comme la somme des multiplicités fait $2m$, et que si λ_i est de multiplicité d, on a :

$$mult(\lambda_i) + mult(\frac{1}{\lambda_i}) = 2d,$$

la multiplicité de 1 est un nombre pair aussi!

3.d. Encore une question difficile, qui exige une connaissance pratique des matrices.

(1) I_4 est symplectique, et a une seule valeur propre!

(2) J_2 est symplectique, son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 + 1$, et donc J_2 admet deux valeurs propres doubles distinctes i et $-i$.

(3) Considérons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que M est symplectique. En outre, M a bien une valeur propre double et deux valeurs propres simples.

(4) Expliquons brièvement comment choisir M. Si par exemple $2i$ est valeur propre de M, les autres valeurs propres sont $0.5i$, $-0.5i$ et $-2i$. Nous posons donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que M est symplectique, et les valeurs propres de M sont $2i$, $0.5i$, $-0.5i$ et $-2i$.

Les dessins dans le plan sont laissés au lecteur!

Deuxième Partie

4.a. La bilinéarité et l'antisymétrie se vérifient aisément. Pour le reste, remarquons que :

$$\omega(x,y)=0 \iff (\eta(x)|y)=0.$$

Le produit scalaire euclidien étant non dégénéré,

$$\omega(x,y)=0\ \forall y\in\mathbb{R}^n \iff \eta(x)=0.$$

Comme on est en dimension finie, la nullité du noyau est équivalente à l'inversibilité, et le résultat est prouvé.

4.b. On considère, pour $x\in\mathbb{R}^n$ fixé :

$$\begin{array}{rccl}\varphi_x: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ & y & \mapsto & \omega(x,y).\end{array}$$

φ_x est linéaire, et il existe un unique $\eta(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y\in\mathbb{R}^n,\quad (\eta(x)|y)=\varphi_x(y)=\omega(x,y).$$

En outre, $x\mapsto\eta(x)$ est linéaire. En effet, pour tout x_1,x_2,λ, pour tout y de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{aligned}(\eta(\lambda x_1+x_2)|y) &= \omega(\lambda x_1+x_2,y)\\ &= \lambda\omega(x_1,y)+\omega(x_2,y)\\ &= \lambda(\eta(x_1)|y)+(\eta(x_2)|y)\\ &= (\lambda\eta(x_1)+(\eta(x_2)|y),\end{aligned}$$

et c'est l'unicité qui permet de conclure à la linéarité de η. En outre,

$$\begin{aligned}(\eta^*(x)|y) &= (x,\eta(y))\\ &= (\eta(y)|x)\\ &= \omega(y,x)\\ &= -\omega(x,y)\\ &= (-\eta(x),y),\end{aligned}$$

et donc $\eta^*=-\eta$. En outre, la question 4.a. nous donne directement que η est inversible.

5. S'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, il existe en particulier un endomorphisme inversible η de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^*=-\eta$. Mais alors, si λ est valeur propre de η de multiplicité k, $-\lambda$ est valeur propre de η^* de multiplicité k, et donc $-\lambda$ est valeur propre de η de multiplicité k (les endomorphismes sont réels, mais les valeurs propres peuvent être complexes). Comme 0 n'est pas valeur propre de η, et que n est la somme des multiplicités des valeurs propres de η, en regroupant chaque valeur propre avec son opposé, on trouve que n est pair.

6.a. Comme $\underline{J}^*=-\underline{J}$ (vérification triviale sur les matrices), et que $\underline{J}$ est inversible, ω_0 est symplectique.

6.b.
- Si $1\leq k\leq m$, $\underline{J}e_k=e_{k+m}$ et $\omega_0(e_k,e_l)=\begin{cases}1 & \text{si } l=k+m\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
- Si $m+1\leq k\leq 2m$, $\underline{J}e_k=-e_{k-m}$ et $\omega_0(e_k,e_l)=\begin{cases}-1 & \text{si } l=k-m\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

6.c.

$$\begin{array}{rcl} (i) & \iff & \forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}\ (\underline{J}\varphi(x)|\varphi(y)) = (\underline{J}x|y) \\ & \iff & \forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}\ ((\varphi^*\underline{J}\varphi)(x)|y) = (\underline{J}x|y) \\ & \iff & \forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}\ ((\varphi^*\underline{J}\varphi - \underline{J})(x)|y) = 0 \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R}^{2m}\ \varphi^*\underline{J}\varphi(x) = \underline{J}(x) \\ & \iff & M \text{ est symplectique.} \end{array}$$

7.a. Remarquons que nous avons le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisque toutes les normes y sont équivalentes. φ ayat des valeurs propres distinctes, φ est $\mathbb{C}-$diagonalisable. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres, $\varphi(x_i) = \lambda_i x_i$, $|\lambda_i| = 1$. Pour $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ de $\mathbb{C}^n$, nous choisissons $\|x\| = |a_1| + \cdots + |a_n|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$ par restriction. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi^p(x)\| & = & \|\lambda_1^p a_1 x_1 + \cdots + \lambda_n^p a_n x_n\| \\ & = & |\lambda_1^p a_1| + \cdots + |\lambda_n^p a_n| \\ & = & |a_1| + \cdots + |a_n| \\ & = & \|x\|. \end{array}$$

En particulier, φ est stable.

7.b. En écrivant les produits matriciels, on prouve aisément que l'endomorphisme que nous noterons φ est symplectique si, et seulement si, ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire si, et seulement si, Ω est orthogonale. Maintenant, une matrice orthogonale conserve la norme euclidienne, notée $\|.\|_2$. En particulier, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, alors :

$$\|\varphi(X)\|_2^2 \quad = \quad \|\Omega(x)\|_2^2 + \|\Omega(y)\|_2^2 = \|X\|_2^2$$

En particulier, l'endomorphisme considéré est stable, et la CNS recherchée est : Ω est orthogonale.

7.c. Si cet endomorphisme φ possède une valeur propre de module $\neq 1$, alors d'après **3.b.**, il en possède une de module > 1. En particulier, il existe z dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\|\varphi^p(z)\| \to +\infty$. Si φ était stable, en écrivant $z = x + iy$, où x et y sont dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\|\varphi^p(z)\| \leq \|\varphi^p(x)\| + \|\varphi^p(z)\| \leq M.$$

8.a. Nous considérons par exemple l'endomorphisme symplectique dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} RI_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}I_m \end{pmatrix}.$$

8.b. φ est simplectique $\iff$ φ^* est symplectique. On a :

$$\omega_0(\varphi^*(e_1),\varphi^*(e_{m+1})) = \omega_0(e_1|e_{m+1}) = 1.$$

D'autre part,

$$\omega_0(\varphi^*(e_1),\varphi^*(e_{m+1})) = (\underline{J}\varphi^*(e_1)|\varphi^*(e_{m+1})).$$

Si $\|\varphi^*(e_1)\| < 1$ et $\|\varphi^*(e_{m+1})\| < 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left|\omega_0(\varphi^*(e_1),\varphi^*(e_{m+1}))\right| < 1,$$

ce qui est absurde!

Supposons par exemple que $\|\varphi^*(e_1)\| \geq 1$, et posons $x = \frac{\varphi^*(e_1)}{\|\varphi^*(e_1)\|} \in B$. Si $y = \varphi(x) = \sum y_i e_i$, alors :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & (y|e_1) \\ & = & (\varphi(x)|e_1) \\ & = & (x|\varphi^*(e_1)) \\ & = & \|\varphi^*(e_1)\| \geq 1. \end{array}$$

En particulier, $y \notin \Gamma_R$, et $\varphi(B) \nsubseteq \Gamma_R$.