Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2001 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : exponentielle de matrice,intégration,suite,projection

Commentaires : Un sujet très très Très classique!

Problème 1

Partie A

A.1. Rappelons que la notation t^a signifie en clair $\exp(a\ln t)$. Si $t\to 0$, $a\ln t\to-\infty$, et par composition des limites, g_a peut être prolongé par continuité en 0, en posant $g_a(0)=0$.
g_a est clairement C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Maintenant, $g_a'(t)=at^{a-1}\to 0$ si $t\to 0$ pour $a\geq 1$ pour les mêmes raisons. De même, $\frac{g_a(t)}{t}\to 0$ si $t\to 0$, et donc g_a est dérivable en 0, avec $g_a'(0)=0$ et g_a' est continue en 0. Donc pour $a\geq 1$, g_a est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

A.2. D'après **A.1.**, $t\mapsto g_a(t)g_b(1-t)$ est continue sur $[0,1]$, et donc $I(a,b)$ est bien défini. En outre, le changement de variable $y=1-t$ donne :

$$I(a,b)=\int_1^0 g_a(1-y)g_b(y)(-dy)=\int_0^1 g_a(1-y)g_b(y)dy=I(b,a).$$

A.3. On réalise une intégration par parties :

$$I(a+1,b)=\left[t^{a+1}\times\frac{-(1-t)^{b+1}}{b+1}\right]_0^1+\frac{a+1}{b+1}I(a,b+1),$$

et les termes au bord étant nuls, on en déduit que :

$$(b+1)I(a+1,b)=(a+1)I(a,b+1).$$

A.4. On a : $I(a,0)=\displaystyle\int_0^1 t^a dt=\frac{1}{a+1}$. Prouvons alors la formule demandée par récurrence sur n, en démontrant le résultat à un n donné pour tous les $a>0$. Elle est vraie pour $n=0$, et au rang $n+1$, on a :

$$\begin{aligned}I(a,n+1)&=\frac{n+1}{a+1}I(a+1,n)\\&=\frac{n+1}{a+1}\frac{n!}{(a+2)\dots(a+n+2)}\\&=\frac{(n+1)!}{(a+1)\dots(a+n+2)}.\end{aligned}$$

A.5. D'après le résultat précédent :

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

A.6. On pose $t = \sin^2\theta$, avec $dt = 2\sin\theta\cos\theta$. On en déduit :

$$(\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1} = \frac{1}{2}(\sin^2\theta)^p(\cos^2\theta)^q(2\sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}t^p(1-t)^q dt.$$

On en déduit que $J(p,q) = \frac{1}{2}I(p,q) = \frac{p!q!}{2(p+q+1)!}$.

Partie B

B.1. f_a est défini pour $1 - \frac{a}{x} > 0$, c'est-à-dire pour $x \leq 0$ ou $x > a$.

B.2. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln, entre les points $x-a$ et x :

$$\inf_{y\in[x-a,x]} \frac{1}{y}|x-(x-a)| \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \sup_{y\in[x-a,x]} \frac{1}{y}|x-(x-a)|,$$

et comme $\inf_{y\in[x-a,x]} \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$ et $\sup_{y\in[x-a,x]} \frac{1}{y} = \frac{1}{x-a}$, on a le résultat demandé.

B.3. Remarquons que $f_a(x) = x(\ln(x-a) - \ln x)$. **B.2.** se traduit donc en :

$$-a \geq f_a(x) \geq -a\frac{x}{x-a}.$$

Le théorème d'encadrement des limites nous dit alors que $\lim_{+\infty} f_a(x) = -a$: C_a admet une asymptote horizontale d'équation $y = -a$. D'autre part, si x tend vers a, il est clair que $f_a(x)$ tend vers $-\infty$: C_a admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
Concernant les variations de f_a, remarquons que sur $]a,+\infty[$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ est décroissante, donc $x \mapsto 1-\frac{a}{x}$ est croissante, et la composée de deux fonctions croissantes restant une fonction croissante, $x \mapsto \ln\left(1-\frac{a}{x}\right)$ est croissante sur $]a,+\infty[$. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonctions croissante : f_a est continue sur $]a,+\infty[$.

B.4. A vous de jouer!

B.5. On a : $y_n = \exp(n\ln(1-a/n)) = \exp(f_a(n))$. On en déduit que (y_n) est croissante, et que (y_n) converge vers e^{-a}.

Partie C

C.1. Le changement de variables $v = \frac{u}{n}$ s'impose. Il donne $du = ndv$, et :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^1 (1-v)^n n^x v^x n dv \\ &= n^{x+1} I(x,n). \end{aligned}$$

C.2. Si x est fixé et si $n \in \mathbb{N}$, pour $u \in [0,n]$, d'après **B.3.**, on a :

$$f_u(n) \leq f_u(n+1),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x &\leq \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \\ \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x du &\leq \int_0^n \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du. \end{aligned}$$

Maintenant, par positivité de la fonction qu'on intègre, $\int_n^{n+1}\left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1}u^x du \geq 0$, ce qui donne :

$$F_n(x) \leq F_{n+1}(x).$$

C.3.a. Par comparaison de la fonction exponentielle et des polynômes, la fonction $u \mapsto u^{x+2}e^{-u}$ tend vers 0 si u tend vers plus l'infini. En particulier, cette fonction est plus petite que 1 pour $u \geq U$, où U est assez grand, ce qui donne le résultat.

C.3.b. Remarquons que si $u \in [0,n]$, alors $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = \exp(f_u(n))$. En **B.3.**, on a prouvé que $-u \geq f_u(n)$, et donc :

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq \exp(-u),$$

ou encore :

$$F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u}u^x du.$$

Nous distinguons alors deux cas :

- Si $n \leq U$, on a directement :

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u}u^x du \leq \int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U}.$$

- Si $n > U$, on coupe l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} F_n(x) &\leq \int_0^U e^{-u}u^x du + \int_U^N e^{-u}u^x du \\ &\leq \int_0^U e^{-u}u^x du + \int_U^N \frac{1}{u^2}du \\ &\leq \int_0^U e^{-u}u^x du + \left[\frac{-1}{u}\right]_U^N \\ &\leq \int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U}. \end{aligned}$$

C.3.c. $(F_n(x))$ est une suite croissante, majorée, donc elle converge!

C.4. D'une part,

$$F_n(x) = n^{x+1}I(x,n) = \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}.$$

D'autre part,

$$F_n(x+1) = n^{x+2}I(x+1,n) = \frac{n^{x+2}n!}{(x+2)\dots(x+n+2)}.$$

On en déduit que :

$$F_n(x+1) = \frac{n(x+1)}{x+n+2}F_n(x).$$

On fait tendre n vers $+\infty$, en remarquant que $\frac{n}{x+n+2}$ tend vers 1. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}_+$,

$$F(x+1) = (x+1)F(x).$$

Il suffit donc de calculer la valeur de $F(0)$ pour en déduire $F(k)$ pour k entier naturel : par une récurrence élémentaire, on prouve en effet que $F(k) = k!F(0)$. Or,

$$F_n(0) = \frac{n \times n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}.$$

On a donc $F(0) = 1$, et $F(k) = k!$. La fonction F est une fonction qui interpole sur $\mathbb{R}_+$ la fonction factorielle. On l'appelle en général fonction Gamma.

Problème 2

Partie A

A.1. Remarquons que les matrices I, A et A^2 commutent. Si $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right)\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right) \\ &= I + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)A^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

(les termes en A^3, $A^4, \dots$ n'interviennent pas car $A^3 = 0$).

A.2. Il s'agit simplement de faire une récurrence à partir du résultat précédent.

A.3. Remarquons que $E(0) = I$. En appliquant **A.1.** avec $s = -t$, on obtient :

$$E(t)E(-t) = E(0) = I,$$

donc $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$.

A.4. Si $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = 0$, on multiplie par A^2 : $\alpha_0 A^2 = 0$, et on trouve $\alpha_0 = 0$. De même, en multipliant par A, on trouve $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = 0$: la famille $(I,\ A,\ A^2)$ est libre.

A.5. Attention! Cette application n'est pas une application linéaire, et il ne suffit pas de calculer son noyau.

$$\begin{aligned} E(s) = E(t) &\iff (t-s)A + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right)A^2 = 0 \\ &\iff t = s \end{aligned}$$

(la dernière équivalence venant du fait que (I,A,A^2) est libre. L'application $t \mapsto E(t)$ est donc injective.

A.6. Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit donc :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

B.1. On calcule $Ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{aligned} (x,y) \in Ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2}) &\iff \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 6y &=& 0 \\ x - 3y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3y \\ y &=& y \end{array} \right. \end{aligned}$$

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $F = vect(\vec{u})$. On calcule aussi $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2}) &\iff \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6y & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ y & = & y \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $G = vect(\vec{v})$. F et G sont donc deux droites vectorielles, dont les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Elles sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2).

B.2. Comme $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u},\vec{v})$, et D la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (la matrice diagonale de la question précédente). Alors les formules de changement de base donnent :

$$A = PDP^{-1}.$$

La matrice P est constituée de la façon suivante : les colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs dans les anciens. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de P est 1, et on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

B.4. Calculer la puissance n-ième d'une matrice est très facile... Il suffit de mettre les coefficients sur la diagonale à la puissance n. On obtient donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prouve que $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence sur n. En effet, cette formule est vraie pour $n = 1$, et si elle est valide au rang n, alors $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -2^{n+1} \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & -3.2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Partie C

C.1 $f(x) = e^x$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et t, à l'ordre n :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{x\in[0,t]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Maintenant, la fonction exponentielle est égale à sa dérivée, et $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$. On trouve donc :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} e^t.$$

Il suffit, pour conclure, de remarquer que la suite $\left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Et ceci fait partie des résultats classiques!

C.2 D'après la formule de A^n exhibée en **B.4.** :

$$\begin{aligned}
a_n(t) &= 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 2^k - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \\
b_n(t) &= -6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k 2^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \\
c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \\
d_n(t) &= -2\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k t^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

C.3. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les équations précédentes, en ayant remarqué que

$$e^{2t} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k t^k}{k!} \right),$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
a(t) &= 3e^{2t} - 2e^t \\
b(t) &= -6e^{2t} + 6e^t \\
c(t) &= e^{2t} - e^t \\
d(t) &= -2e^{2t} + 3e^t.
\end{aligned}$$

C.4. Nous avons :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C.5 Un petit calcul matriciel montre d'une part que $Q^2 = Q$ et $R^2 = R$, et d'autre part que $QR = RQ = 0$. Les endomorphismes q et r sont donc des projections, et l'image de r est inclus dans le noyau de q (et réciproquement). En outre, l'image de q est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme ces deux vecteurs sont colinéaires, c'est encore la droite vectorielle engendrée par un seul des deux, et on retrouve F. De même, pour l'image de R, on trouve G : q est la projection sur F parallèlement à G, et r est la projection sur G parallèlement à F.

C.6. On a :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{s+t}R^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

Par une récurrence sur n, $(E(t))^n = E(nt)$, et de même qu'on l'a déjà prouvé en partie **A**, $(E(t))^{-1} = E(-t)$ (il faut au préalable remarquer que $Q + R = I$).
Montrons que (Q,R) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, si $\alpha Q + \beta R = 0$, on compose par Q et on obtient $\alpha Q = 0 \implies Q = 0$.
De ce fait, si $E(t) = E(s)$, on a nécessairement $e^{2s} = e^{2t}$ et $e^s = e^t$, et par conséquent $s = t$. L'application $t \mapsto E(t)$ est injective.