# Concours Mines-Ponts 2001 PC/PSI - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart et est disponible à l'adresse suivante : http://mathweb.free.fr
Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

**Mots-clés :** équations différentielles, séries entières, intégrales dépendant d'un paramètre, permutation limite/intégrale, calcul d'intégrales

**Commentaires :** C'est un sujet très classique, où il est question d'équations différentielles, de séries entières, d'intégrales dépendant d'un paramètre, de permutation de limites et d'intégrales. Difficulté très raisonnable.

## Première Partie

I.1.a. On introduit $f_\lambda$ dans l'équation différentielle. On obtient :

$$x\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-x)\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1} - \lambda\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

Nous regroupons les termes :

$$\sum_{n\geq 0} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0}(-n-\lambda)a_n x^n = 0.$$

On effectue un changement d'indice dans la première somme :

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}(n+\lambda)a_n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2}a_n.$$

En résolvant cette récurrence, et en se souvenant que $a_0 = 1$, on a finalement :

$$a_n = \frac{(n-1+\lambda)(n-2+\lambda)\dots\lambda}{(n!)^2}.$$

Nous distinguons alors les cas suivants :

- Cas $\lambda = 1$ : $a_n = \dfrac{1}{n!}$, et $f_1(x) = e^x$.
- Cas $\lambda = 0$, alors $a_n = 0$ pour $n \geq 0$, et $f_0(x) = 1$.
- Cas $\lambda = -1$ : $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = 0$ pour $n \geq 2$, soit $f_{-1}(x) = -x + 1$.
- Cas $\lambda = -2$ : $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1/2$, et $a_n = 0$ pour $n \geq 3$. On a donc $f_{-2}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

I.1.b. Comme cela est indiqué par la question précédente, $f_\lambda$ estun polynôme si, et seulement si, $\lambda = -p$, où $p$ est un entier. Pour $n \geq p+1$, on a alors $a_n = 0$, et :

$$a_p = \frac{(p-1-p)(p-2-p)\dots(-p)}{(p!)^2} = \frac{(-1)^p}{p!} \neq 0.$$

$f_\lambda$ est donc de degré $p$, et $a_p$ est son coefficient dominant.

I.1.c. Lorsque $f_\lambda$ n'est pas un polynôme, les coefficients $a_n$ ne s'annulent pas, et donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \to 0.$$

Le rayon de convergence est donc $+\infty$.

I.2.a. On pose $f(x) = e^x \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$. On vérifie facilement que $f$ est solution de $(E_1)$, et elle est indépendante de $f_1$. L'ensemble des solutions de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$, intervalle où $x$ ne s'annule pas, est un espace vectoriel de dimension 2. Une solution générale de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$ est donc : $ae^x + be^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$.

I.2.b. On peut faire le même travail que précédemment, avec $g(x) = \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}dt$, et donc la solution générale de $(E_1)$ sur $]-\infty,0[$ est $ce^x + de^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}dt$.

I.2.c. Pour t qui tend vers 0, $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$, et l'on sait que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur [0,1]. On en déduit que : $\lim_{x\to 0} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt = -\infty$. Nécessairement, si une solution de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$, alors $b=0$. Donc les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_1)$ sont les $ae^x$.

I.3.a. Il vaut mieux être filou, car le b. donne la réponse à la question. En effet, $g_\lambda$ est solution de $E_{1-\lambda}$ :

$$g'_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x) - e^x f'_\lambda(-x)$$

$$g''_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x) - 2e^x f'_\lambda(-x) - e^x f''_\lambda(-x),$$

d'où, en utilisant l'équation différentielle satisfaite par $f_\lambda$ :

$$xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) = (1-\lambda)g_\lambda(x).$$

I.3.b. $g_\lambda$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$, est solution de $E_{1-\lambda}$, et vérifie $g_\lambda(0) = 1$. Puisque seule la fonction $f_{1-\lambda}$ vérifie ces conditions, elles sont égales et donc :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

I.3.c. On a $f_p(x) = e^{-x} f_{1-p}(-x)$. C'est le produit d'un exponentiel et d'un polynôme. En particulier, $f_2(x) = e^{-x}(x+1)$, et $f_3(x) = e^{-x}(x^2/2 + 2x + 1)$.

I.3.d. Le calcul donne :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{f_{1-(p+1)}(-x)}{xf_{1-p}(-x)} = \frac{f_{-p}(-x)}{xf_{1-p}(-x)} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^p(-x)^p(p-1)!}{xp!(-x)^{p-1}(-1)^{p-1}} = \frac{1}{p}.$$

I.4. Voici le genre de questions particulièrement pénible si l'on essaie de la résoudre “à la main”, mais où l'usage d'un logiciel de calcul formel est parfaitement adapté. Voici ce que peut donner un listing sous Maple :

```
> r:=(x,y,z)->sqrt(x^2+y^2+z^2):
> F:=f(r(x,y,z))/sqrt(r(x,y,z)):
> Fx:=diff(F,x):
> Fxx:=diff(Fx,x):
```

```
> Fy:=diff(F,y):
> Fyy:=diff(Fy,y):
> Fz:=diff(F,z):
> Fzz:=diff(Fz,z):
> Fq=simplify(Fxx+Fyy+Fzz-r(x,y,z)/z*Fz+F/(4*r(x,y,z)*r(x,y,z)));
```

Après simplifications d'usage, nous trouvons que $F$ est solution de l'équation aux dérivées partielles si, et seulement si,

$$2r^2 f_\lambda''(r) + 2r(1-r)f_\lambda'(r) + 2rf_\lambda(r) = 0.$$

Sur l'ouvert $\omega$, $r$ est strictement positif, et on peut simplifier par $r$ dans l'équation précédente. En particulier, on trouve que $f_\lambda$ est solution de $E_{-1/2}$, il faut donc choisir $\lambda = -1/2$.

## Deuxième Partie

II.1. C'est du classique (intégrales de Wallis). On détermine une relation de récurrence entre $I_p$ et $I_{p+1}$ grâce à une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+2}\theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1}\theta \sin\theta d\theta \\
&= \left[\sin^{2p+1}\theta(-\cos\theta)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (2p+1)\sin^{2p}\theta(-\cos^2\theta)d\theta \\
&= (2p+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= (2p+1)(I_p - I_{p+1}).
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p.$$

Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_p &= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

II.2.a. Pour tout $x$, $\theta \mapsto e^{x\sin^2\theta}$ est une fonction continue sur $[0,\pi/2]$. L'intégrale définissant $\varphi$ est donc parfaitement définie. En outre, $(x,\theta) \mapsto e^{x\sin^2\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi/2]$, et donc par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. De même, en étudiant successivement les dérivées partielles, on peut prouver que $\varphi$ est de classe $C^\infty$.

II.2.b. On applique le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. Nous fixons $x$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$e^{x\sin^2\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}.$$

Or,

$$\int_0^{\pi/2} \left|\frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}\right| d\theta = \frac{|x|^n(2n)!\pi}{(n!)^3 2^{2n+1}}.$$

Mais le terme de droite dans l'égalité est le terme général d'une série convergente, ce que l'on voit en appliquant la règle de D'Alembert. En particulier, d'après le théorème d'interversion d'une limite et d'une intégrale, on trouve :

$$\int_0^{\pi/2} e^{x\sin^2\theta}d\theta = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n(2n)!}{(n!)^3 2^{2n}}\frac{\pi}{2},$$

cette égalité étant valable pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$. $\varphi$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et en particulier on retrouve qu'elle est de classe $C^\infty$.
Pour $\lambda = 1/2$, $f_{1/2}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-1+1/2)\dots 1/2}{(n!)^2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3}. \end{aligned}$$

On en déduit que $f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$, par unicité du développement en série entière.

II.3.a. L'idée est d'étudier une fonction, mais pas $u \mapsto e^u - \frac{1}{1-u}$ qui ne se simplifierait pas. Il faut tripatouiller l'inégalité... Nous posons donc $g(u) = e^u - ue^u - 1$. Alors $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(u) = -ue^u$. $g$ atteint donc son maximum en 0, et $g(0) = 0$. On a donc $g(u) \leq 0$ pour tout $u$, ce qui se réécrit en $e^u \leq \frac{1}{1-u}$.

II.3.b. Il faut se souvenir comment intégrer une fraction rationnelle en sinus et cosinus. La règle de Bioche (cf le formulaire du Mathweb par exemple) nous conduit au changement de variable $u = \tan\theta$. Alors $du = (1+\tan^2\theta)d\theta = (1+u^2)d\theta$. D'autre part, $\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{u^2}{1+u^2}$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{du}{(1-x)u^2+1} \\ &= \frac{1}{1-x}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1-x}\left[\sqrt{1-x}\arctan(u\sqrt{1-x})\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

II.3.c. D'abord, il est clair que $\varphi(x) \geq 0$. D'autre part, en intégrant l'inégalité de II.3.a. avec $u = x\sin^2\theta$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} e^{x\sin^2\theta}d\theta \leq \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1-x\sin^2\theta} = J(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$$

(ce qui nous confirme notre calcul précédent)!

II.3.d. C'est une question qui n'est pas facile sans indications. Il faut réaliser des encadrements, et la première idée qui vient à l'esprit est de partir de l'inégalité de convexité classique :

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \leq \theta, \text{ pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, comme $x \leq -1$, on trouve :

$$x\sin^2\theta \geq x\theta^2.$$

Ceci donne :

$$\varphi(x) \geq \int_0^{\pi/2} e^{x\theta^2} d\theta.$$

On fait un changement de variables pour sortir $x$, en posant $y = \sqrt{-x}\theta$. On obtient :

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi/2} e^{-y^2} dy,$$

ce qui est le résultat souhaité!

II.3.e. L'encadrement obtenu en II.3.c. couplé au théorème d'encadrement des limites prouve que $f$ tend vers 0 en $-\infty$. La fonction $f_{1/2}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$, car sinon par comparaison $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-x}}$ le serait.

II.4.a. En appliquant I.3.b. avec $\lambda = 1/2$, on obtient $f_{1/2}(-x) = e^{-x} f_{1/2}(x)$. D'après la définition de $h$, ceci prouve que $h$ est paire. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-x/2} \int_0^{\pi/2} e^{x \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{\frac{x}{2}\left(2\sin^2\theta - 1\right)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{x\cos 2\theta}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

On réalise le changement de variables $u = 2\theta$, on coupe l'intégrale en deux, et dans la deuxième intégrale on fait le changement de variables $y = \pi - u$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} e^{\frac{-x\cos u}{2}} du + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\frac{-x\cos u}{2}} du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} e^{\frac{-x\cos u}{2}} du + \int_0^{\pi/2} e^{\frac{x\cos y}{2}} dy\right) \\ &= \int_0^{\pi/2} \cosh\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta. \end{aligned}$$

II.4.b. Pour $y \leq -1$, nous savons que $f_{1/2}(y) \geq \frac{A}{\sqrt{-y}}$. Comme $f_{1/2}(x) = e^x f_{1/2}(-x)$, nous obtenons que $f_{1/2}(x) \geq \frac{Ae^x}{\sqrt{x}}$. On en déduit que $h(x)$ et $\frac{h(x)}{x}$ tendent vers plus l'infini si x tend vers plus l'infini. Autrement dit, $h$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

II.4.c. Toujours pour les mêmes raisons, nous avons :

$$h'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{2} \sinh\left(\frac{x\cos\theta}{2}\right) d\theta,$$

qui a le signe de $x$. Nous vous laissons le soin de dessiner le graphe de $h$ (qui doit ressembler à celui du cosinus hyperbolique).