Concours Centrale-Supélec 2001 PC - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart et est disponible à l'adresse suivante : http://mathweb.free.fr
Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : développement limité, formule de Taylor, théorème de Rolle, convergence uniforme, inégalité de Kolmogorov

Commentaires : Il s'agit de démontrer des inégalités assez classiques (les inégalités de Kolmogorov) reliant les normes uniformes des dérivées de fonctions C^n. Ce problème est très (trop?) technique pour une classe de PC. Les questions dépendent beaucoup les unes des autres. A conseiller à ceux qui ont du mal avec cette optique des problèmes!

Préliminaire

1) D'une part, nous écrivons que :

$$(e^x-1)^m=(x+o(x))^m=x^m+o(x^m).$$

D'autre part, en écrivant la formule du binôme de Newton :

$$(e^x-1)^m=\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}C_m^k e^{kx}.$$

Nous écrivons alors le développement limité de chaque $x\mapsto e^{kx}$ à l'ordre m, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(e^x-1)^m &= \sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}\sum_{j=0}^m\frac{k^jx^j}{j!}+o(x^m)\\ &= \sum_{j=0}^m\left(\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}C_m^kk^j\right)\frac{x^j}{j!}+o(x^m).\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, nous trouvons donc :

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}k^m=m!\\ \sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}C_m^kk^j=0 \text{ si } 0<j<m.\end{cases}$$

2) Nous procédons par récurrence sur $n\geq k$, le résultat étant vrai pour $n=k$. S'il est vrai au rang n, et que nous souhaitons le prouver au rang $n+1$, nous posons :

$$\begin{aligned}\Delta &= (n+1)\ln(u_1\dots u_k)-k\ln(u_1\dots u_{n+1})\\ &= [n\ln(u_1)+\dots+n\ln u_k-k\ln u_1-\dots-k\ln u_n]+[\ln(u_1)+\dots+\ln(u_k)-k\ln(u_{n+1})]\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le premier crochet est négatif ou nul. Quand au second, comme la suite est croissante, on a : $u_{n+1}\geq u_j$, où $j\in\{1,\dots,k\}$. Donc le deuxième crochet est négatif ou nul, et Δ aussi. En appliquant l'exponentielle, on voit que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.

Première Partie

I.A.1. Nous appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, puis entre x et $x-h$:

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leq \frac{M_2h^2}{2},$$

$$|f(x-h)-f(x)+hf'(x)| \leq \frac{M_2h^2}{2}.$$

Nous posons $a = f(x+h)-f(x)-hf'(x)$ et $b = f(x-h)-f(x)+hf'(x)$. En appliquant l'inégalité triangulaire $|a-b| \leq |a|+|b|$, nous trouvons :

$$|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| \leq M_2h^2.$$

Nous appliquons encore l'inégalité triangulaire avec $|c-d| \geq |c|-|d|$, pour trouver :

$$2h|f'(x)| \leq M_2h^2 + |f(x+h)| + |f(x)| \leq M_2h^2 + 2M_0.$$

Simplifiant par $2h$, nous savons que :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}.$$

I.A.2. Nous optimisons la quantité située à droite de l'inégalité en cherchant le minimum de $g(h) = \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$. Nous avons :

$$g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2},$$

le minimum est atteint au point où s'annule la dérivée, ie en

$$h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}.$$

En reportant dans l'inégalité du I.A.1), f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

I.B.1) Nous appliquons toujours l'inégalité de Taylor-Lagrange, cette fois à l'ordre 3 :

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)| \leq \frac{M_3h^3}{6},$$

$$|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)| \leq \frac{M_3h^3}{6}.$$

Nous procédons toujours comme en I.A.1), cette fois avec $a = f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)$ et $b = f(x+h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)$. Nous avons donc :

$$|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| \leq \frac{M_3h^3}{3},$$

puis nous utilisons une dernière fois l'inégalité triangulaire :

$$2h|f'(x)| \leq \frac{M_3h^3}{3} + |f(x+h)| + |f(x-h)|.$$

Cela donne :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_3h^2}{6} + \frac{M_0}{h}.$$

On optimise : si on pose $g(h) = \frac{M_3h^2}{6} + \frac{M_0}{h}$, le minimum de g est atteint au point

$$h = \left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}.$$

Le report de cette valeur de h dans l'inégalité donne le résultat souhaité.

I.B.2) f'' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$, car f' et $f^{(3)}$ le sont, et on applique la question I.A.

Deuxième Partie

II.A. Nous écrivons toutes ces inégalités :

$$\left|f(x+1)-f(x)-f'(x)'-\frac{f''(x)}{2}-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right|\leq\frac{M_n}{n!}$$

$$\vdots$$

$$\left|f(x+k)-f(x)-kf'(x)'-k^2\frac{f''(x)}{2}-\cdots-k^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right|\leq\frac{M_nk^n}{n!}$$

$$\vdots$$

$$\left|f(x+n-1)-f(x)-(n-1)f'(x)'-(n-1)^2\frac{f''(x)}{2}-\cdots-(n-1)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right|\leq\frac{M_n(n-1)^n}{n!}$$

Nous posons $a_k=(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k\left(f(x+k)-f(x)-kf'(x)-k^2\frac{f''(x)}{2}-\cdots-k^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right)$, et appliquons l'inégalité triangulaire $|a_1+\cdots+a_{n-1}|\leq|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|\leq K$, où K est une constante que ne dépend que de M_n et n. Mais

$$\begin{aligned}a_1+\cdots+a_{n-1} &= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}C_{n-1}^jf(x+j)-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^kk^j\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}C_{n-1}^jf(x+j)-f^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé les résultats des préliminaires. En procédant comme en I. (ie en appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire), nous en déduisons que : $|f^{(n-1)}(x)|$ est borné par une constante indépendante de x (elle ne dépend que de K, M_n et M_0). Donc $f^{(n-1)}$ est aussi une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B. Par récurrence, on trouve que $f^{(n-2)},f^{(n-3)},\dots,f'$ sont aussi bornées.

II.C.1) Si $M_0=0$ ou $M_1=0$, la fonction est constante, ce qui est interdit par l'énoncé. Sinon, si $M_k=0$ avec $k\geq 2$, alors f est un polynôme (non constant), et n'est pas borné sur $\mathbb{R}$, ce qui est exclu par la question précédente.

II.C.2) Nous allons appliquer la question 2) des préliminaires. Prouvons d'abord que la suite (u_k) est croissante. En effet :

$$\begin{aligned}u_{k+1}-u_k &= 2^{k-1}\left(2\frac{M_{k+1}}{M_k}-\frac{M_k}{M_{k-1}}\right)\\ &= 2^{k-1}\left(\frac{2M_{k+1}M_{k-1}-M_k^2}{M_kM_{k-1}}\right),\end{aligned}$$

et nous savons d'après I.A.2) que $2M_{k+1}M_{k-1}\geq M_k^2$. Nous avons donc :

$$(u_1\dots u_k)^n=2^{n(1+\cdots+(k-1))}\frac{M_k^n}{M_0^n}\leq(u_1\dots u_n)^k=2^{k(1+\cdots+(n-1))}\frac{M_n^k}{M_0^k},$$

d'où :

$$M_k^n2^{\frac{nk(k-1)}{2}}\leq 2^{\frac{kn(n-1)}{2}}M_n^kM_0^{n-k}.$$

En réaménageant cette inégalité, on trouve le résultat souhaité. L'inégalité n'est pas optimale, puisque pour $k=1$ et $n=3$, elle donne $M_1\leq 2M_0^{2/3}M_3^{1/3}$, ce qui est moins bon que I.B.1).

Troisième Partie

III.A. Nécessairement, g est une primitive de f, et $g(x) = \int_0^x f(t)dt + C$. Si $\Delta(x) = g(x+1) + g(x)$, alors en tout point de continuité de f et $f(x+1)$, Δ est dérivable et $\Delta'(x) = f(x+1) + f(x) = 0$, et donc Δ est une constante. Mais on souhaite que $\Delta(0) = 0$, et pour cela il est nécessaire de poser $C = \frac{-1}{2}\int_0^1 f(t)dt$. Cette condition est aussi suffisante.

III.B.1. Nous construisons d'abord φ_0 sur $]1,2]$: si $0 < x < 1$, alors $\varphi_0(1+x) = -\varphi_0(x) = -1$, et donc φ_0 vaut -1 sur $]1,2[$, et 0 en 2.

Pour calculer φ_1, nous appliquons la formule ci-dessus, en remarquant que $\int_0^1 \varphi_0(t)dt = 1$. Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x - 1/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi_1(x) = -x + 3/2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Nous effectuons le même travail pour φ_2 pour trouver :

$$\begin{cases} \varphi_2(x) = x^2/2 - x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi_2(x) = -x^2/2 + 3x/2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Nous vous laissons le soin de traiter les cas $k = 3$, $k = 4$, qui n'interviennent pas dans la suite.

III.B.2. Nous prouvons par une récurrence simultanée les deux résultats, sachant qu'ils sont vrais pour $k = 0,1,2$. Supposons qu'ils sont vrais à l'ordre k, et prouvons-les à l'ordre $k+1$. Commençons par prouver que, si k est impair, alors : $\displaystyle\int_0^1 \varphi_k(t)dt = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_k(t)dt &= -\int_1^0 \varphi_k(1-u)du \\ &= \int_1^0 \varphi_k(u)du \\ &= -\int_0^1 \varphi_k(t)dt, \end{aligned}$$

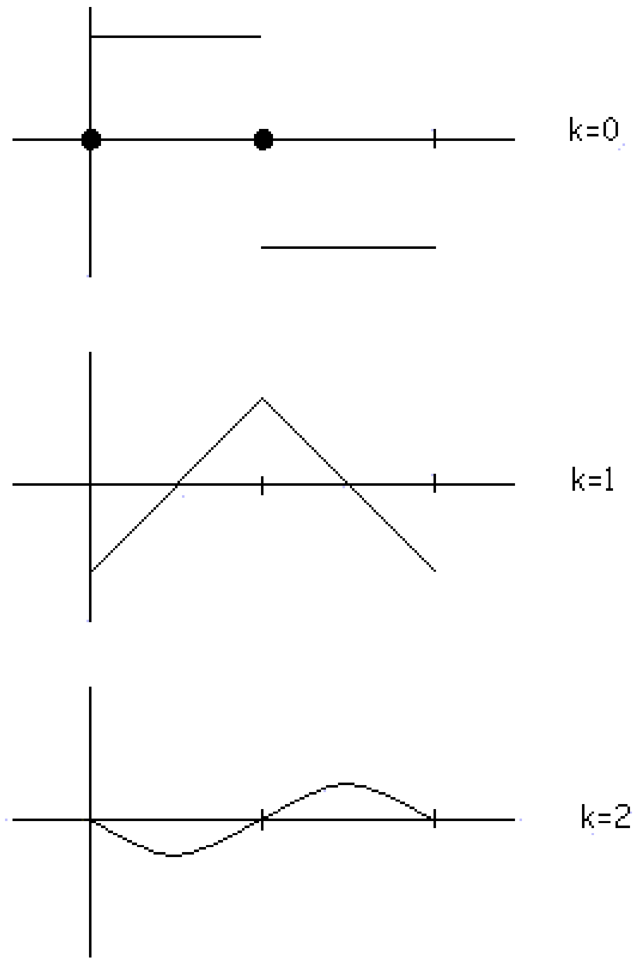
où la première inégalité provient du changement de variables $u = 1-t$, et la seconde de l'identité $\varphi_k(1-x) = -\varphi_k(x)$ (k est impair). Donc, d'après III.A., si k est impair :

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(-x) &= \int_0^{-x} \varphi_k(t)dt \\ &= -\int_0^x \varphi_k(-u)du \\ &= -\int_0^x \varphi_k(u)du \\ &= -\varphi_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Si k est pair :

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(-x) &= \int_0^{-x} \varphi_k(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_k(t)dt \\ &= -\int_0^x \varphi_k(-u)du + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_k(t)dt \\ &= \int_0^x \varphi_k(u)du + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_k(t)dt \\ &= \varphi_{k+1}(x), \end{aligned}$$

ce qui est toujours le résultat voulu! L'autre assertion se prouve exactement de la même façon, modulo l'application de la relation de Chasles dans l'intégrale.


k=0
k=1
k=2

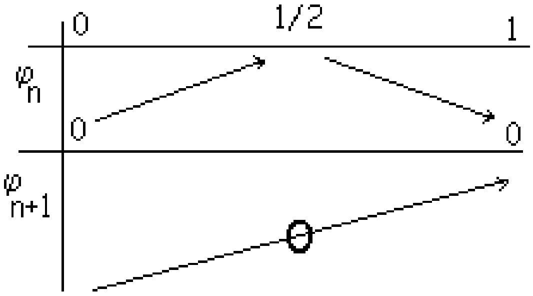


FIG. 1 – *Tableau de variations de* φ_{n+1}

III.B.3. Il suffit de regarder quel est le maximum sur [0,1]. Nous prouvons par récurrence sur n un résultat plus précis :

- Si $n = 2k$, alors $\varphi_n(0) = 0$, φ_n est monotone sur [0,1/2], et monotone de sens contraire sur [1/2,1], avec $\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2)$.
- Si $n = 2k-1$, alors $\varphi(1/2) = 0$, et φ_n est monotone sur [0,1], avec $\lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0)$.

Le résultat est vrai pour $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$, et pour passer du rang n au rang $n+1$, nous distinguons deux cas :

- Si $n = 2k$, avec par exemple k pair. Le tableau de variations, calculé grâce à la relation $\varphi'_{n+1} = \varphi_n$, et à l'hypothèse de récurrence, est donné à la figure 1. En particulier, on obtient bien l'assertion concernant la monotonie de φ_{n+1}, et $\varphi_{n+1}(1/2) = 0$ d'après III.B.2. En outre, $\lambda_{2k+1} = \max(|\varphi_{2k+1}(0)|,|\varphi_{2k+1}(1)|)$. Comme on sait que $|\varphi_{n+1}(1)| = |\varphi_{n+1}(0)|$, on retrouve bien $\lambda_{2k+1} = (-1)^{k+1}\varphi_{2k+1}(0)$.
- Si $n = 2k-1$, le raisonnement est exactement similaire.

III.C.1) Nous avons déjà montré à la question III.A. que :

$$2Tf(x) = 2\int_0^x f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt.$$

Nous utilisons la relation de Chasles pour décomposer la première intégrale :

$$\begin{aligned} 2Tf(x) &= \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \\ &= \int_0^x f(t)dt + \int_1^x f(t)dt. \end{aligned}$$

III.C.2) Il suffit de prendre x dans [0,1] pour calculer le maximum. Nous avons :

$$\begin{aligned} 2|Tf(x)| &\leq \int_0^x N(f)dt + \left|\int_1^x N(f)dt\right| \\ &\leq xN(f) + (1-x)N(f) \\ &\leq N(f). \end{aligned}$$

III.D. Si $N(Tf) = 1/2$, c'est qu'on a égalité dans les inégalités précédentes. En particulier, il existe x de [0,1] tel que :

$$\begin{cases} \left|\int_0^x f(t)dt\right| = xN(f) \\ \left|\int_1^x f(t)dt\right| = (1-x)N(f) \end{cases}$$

Nous nous inspirons de la démonstration du théorème suivant : si f est continue sur $[a,b]$, si $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est identiquement nulle. Ici, si $y \in]0,x[$ est un point de continuité de f, et si on a l'inégalité stricte $|f(y)| < N(f)$, nous considérons $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, si $t \in [y-\alpha,y+\alpha] \subset [0,x]$, alors $|f(t)| \leq N(f) - \varepsilon$ (nous avons exploité la continuité de f au point y). Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)dt\right| &\leq \int_0^{y-\alpha} |f(t)|dt + \int_{y-\alpha}^{y+\alpha} |f(t)|dt + \int_{y+\alpha}^{x} |f(t)|dt \\ &\leq (y-\alpha)N(f) + 2\alpha N(f) - 2\alpha\varepsilon + (x-y-\alpha)N(f) \\ &\leq N(f) - 2\alpha\varepsilon,\end{aligned}$$

et donc sous cette hypothèse on aurait $|f(x)| < N(f)$, ce qui n'est pas le cas. Donc, en tout point de continuité de f, on a $f(y) = \pm N(f)$. Ainsi, si $f \in E$, vérifie $N(f) = 2N(Tf)$, alors f est continue par morceaux sur $[0,1[$, et sur chaque intervalle non réduit à un point où f est continue, alors f est constante et vaut $\pm N(f)$, c'est-à-dire ± 1 ici. f est ensuite défini sur les autres intervalles $[k,k+1[$ grâce à l'équation fonctionnelle.

III.E. Si une telle fonction existe, alors f serait constante, et égale à ± 1. C'est impossible car $f(0) + f(1) = 0$. Il n'existe donc pas de fonction f de norme 1 dans F telle que $N(Tf) = 1/2$.

III.F.1)a) Soient $x_1,\dots,x_q$ q zéros distincts de f sur$[0,2p[$. Une application du théorème de Rolle assure que f' s'annule sur chacun des intervalles $]x_1,x_2[,\dots,]x_{q-1},x_q[,]x_q,x_1+2p[$. On note $y_1,\dots,y_q$ ces zéros. Si $y_q < 2p$, alors on a trouvé q zéros de f' dans $[0,2p[$, sinon, on remplace y_q par $y_q - 2p$.

III.F.1)b) Les q zéros de f' construits à la question précédente sont tous distincts de ceux de f. Si f et f' avait une racine commune, alors f' aurait (au moins) $q+1$ racines, ce qui n'est pas le cas.

III.F.2)a) Nous avons $l^{(n-1)}(x) = \varphi_n^{(n-1)}(x) - \nu f^{(n-1)}(x+\rho) = \varphi_1(x) - \nu f^{(n-1)}(x+\rho)$. Si $l^{(n-1)}$ s'annule au moins $(2p+1)$ fois, $l^{(n)}$ aussi d'après III.F.1. Mais sur $]0,1[$, nous avons :

$$|l^{(n)}(x)| \geq 1 - \nu N(f^{(n)}) \geq 1 - \nu > 0.$$

Donc $l^{(n)}$ ne peut s'annuler qu'en des points entiers, et dans $[0,2p[$, il y a exactement $2p$ points entiers. Donc $l^{(n)}$ a au plus $2p$ zéros dans $[0,2p[$. Il en est de même de $l^{(n-1)}$.

III.F.2)b) Nous distinguons deux cas suivant que n est pair ou impair.

- Si n est impair, λ_n est atteint aux points entiers par φ_n. Si on suppose par exemple $\varphi_n(0) = +\lambda_n$, alors $\varphi_n(1) = -\lambda_n,\dots,\varphi_n(2p) = +\lambda_n$. Mais comme $|\nu f(k+\rho)| < \lambda_n$ par hypothèse, l a le signe de φ_n en les points entiers. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, l s'annule sur $]k,k+1[$, ce qui donne $2p$ points d'annulation.
- Si n est pair, φ_n est nul en les points entiers, et λ_n est atteint en les points $1/2+k$. On suppose par exemple $\varphi_n(1/2) = +\lambda_n$, ce qui donne $\varphi_n(1/2+k) = (-1)^k\lambda_n$. Par le même raisonnement que précédemment, on trouve pour l $(2p-1)$ points d'annulation, un dans chaque intervalle $[1/2+k,1/2+k+1]$, pour $k = 0,\dots,2p-2$. Il nous en faut encore un! Si $l(0) \leq 0$, nous en obtenons un par le théorème des valeurs intermédaires dans $[0,1/2[$. Dans le cas contraire, le même théorème en donne un dans $]1/2+(2p-1),2p[$.

III.F.2)c) Du fait que $N(f^{(n)}) \leq 1$, $l^{(n-1)}$ s'annule au plus 2p fois, et en prenant la contraposée de III.F.1)a), $l^{(k)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0,2p[$, pour $k = 1,\dots,n-1$. D'autre part, comme $N(f) \leq \lambda_n$, l s'annule au moins 2p fois, et toujours en utilisant III.F.1)a) (cette fois dans le sens direct), nous savons que tous les $l^{(k)}$ aussi!

III.F.3)a) Par $2p-$ péridodicité de f', et par continuité de f', nous avons :

$$N(f) = \sup_{[0,2p]} |f'| = \max_{[0,2p]} |f'|.$$

Ceci prouve l'existence de α. En outre, comme $\varphi_n' = \varphi_{n-1}$, en choisissant $\beta = 0$ ou $\beta = 1$ si $n-1$ est impair, $\beta = 1/2$ ou $\beta = 3/2$ si n-1 est pair, on trouve un tel β en vertu de III.B.3.

III.F.3)b) Par un calcul simple :

$$h'(\beta) = \varphi_n'(\beta) - \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')} f'(\alpha) = 0,$$

par définition immédiate de β. D'autre part,

$$h''(\beta) = \varphi_n''(\beta) - \frac{\lambda_{n-1} f''(\alpha)}{N(f')}.$$

Mais β a été choisi pour correspondre à un extréma de $\varphi_n' = \varphi_{n-1}$, et on sait que les extrema de φ_n' correspondent aux zéros de φ_n''. On en déduit que $\varphi_n''(\beta) = 0$. D'autre part, comme $|f'(\alpha)| = N(f')$, on a $f''(\alpha) = 0$. D'où ceci donne $h''(\beta) = 0$.

III.F.3)c) On suppose $N(f) \leq \lambda_n$, et $N(f^{(n)}) \leq 1$, mais $N(f') > \lambda_{n-1}$. Alors en appliquant III.F.2)c) pour $\nu = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')}$, $0 < \nu < 1$, et $\rho = \beta - \alpha$, nous savons que h' et h'' ont exactement 2p zéros sur $[0{,}2p[$. Or, ils ont un zéro commun, à savoir β. Ceci contredit III.F.1)b).

III.F.3)d) Si $n = 2$, alors $N(f) \leq \lambda_2 = 1/8$, et $N(f'') \leq 1$. Alors, d'après les résultats de la partie I, nous savons que :

$$N(f') \leq \sqrt{2\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = \lambda_1.$$

III.G. Posons d'abord $f(x) = \int_0^x \sin^n(t)dt$. Alors $f(0) = 0$, $f(\pi) > 0$. En outre, dans toutes les dérivées de f d'ordre inférieur ou égal à n, on va pouvoir factoriser par $\sin x$, et donc pour $k = 1,\dots,n$, nous avons : $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$.

En translatant la fonction, et en la multipliant par une constante, on obtient une fonction g définie sur $[-1, -1/2]$ avec $g(-1) = 0$, $g(-1/2) = 1$, $0 \leq g \leq 1$, et $g^{(k)}(-1) = g^{(k)}(-1/2) = 0$ pour $k = 1,\dots,n$. Nous définissons ω sur $]-\infty{,}0]$ par :

$$\begin{cases} \omega(x) = 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ \omega(x) = g(x) & \text{si } x \in]-1, -1/2[\\ \omega(x) = 1 & \text{si } x \in [1/2{,}0]. \end{cases}$$

Nous complétons le domaine de définition de ω par parité sur $[0,+\infty[$. Alors ω est continue (il suffit de vérifier en -1 et $-1/2$). En outre, si $1 \leq k \leq n$, et si $x \in]-1, -1/2[$, on a : $\omega^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$. En particulier :

$$\lim_{x\to -1^+} \omega^{(k)}(x) = \lim_{x\to(-1/2)^-} \omega^{(k)}(x) = 0.$$

Ces limites correspondent aussi aux limites des dérivées $k-$ièmes par valeurs inférieures en -1, et par valeurs supérieures en -1/2. Par applications successives du théorème de prolongement d'une dérivée, nous prouvons donc que ω est k fois dérivable en -1 (resp. en -1/2), et que la dérivée $k-$ième y est continue. Comme il n'y a aucun problème aux autres points, nous concluons que ω est C^n, et vérifie bien toutes les hypothèses demandées.

Remarque : On dit que ω est une fonction plateau. Avec des méthodes un petit plus sophistiquées, on pourrait même construire une fonction plateau C^∞.

III.H.1) f_p est C^{n-1}, et de classe C^n par morceaux sur $[-p{,}p[$, comme produit d'une fonction de classe C^n et d'une fonction de classe C^{n-1} et C^n par morceaux (on peut retrouver ce résultat à l'aide de la formule de Leibniz). En particulier, $f_p^{(n)}$ est continue par morceaux sur $[-p{,}p[$, et comme le raccordement se fait bien en p, elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (pour ceux qui ne seraient pas tout à fait convaincus, passer par la formule de Leibniz).

Ensuite, $|f_p(x)| \leq \alpha|f(x)||\omega(x/p)|$, d'où $N(f_{(p)}) \leq \alpha N(f)N(\omega) \leq \lambda_n$. Pour calculer $f_p^{(n)}$, nous utilisons donc la formule de Leibniz :

$$f_p^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x)\omega(x/p) + \frac{1}{p}\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha C_n^k f^{(k)}(x) \frac{1}{p^{n-k-1}} \omega^{(n-k)}(x/p)\right].$$

Or,

- $N\left(\alpha f^{(n)}(x)\omega(x/p)\right) \leq \alpha$.
- D'après la partie II., chaque $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et :

$$N\left(\frac{1}{p^{n-k-1}}\omega^{(n-k)}(x/p)\right) \leq N\left(\omega^{(n-k)}\right), \text{ pour } p \geq 1 \text{ entier.}$$

En particulier, en utilisant l'inégalité triangulaire, il existe $C > 0$, indépendant de p, tel que :

$$N\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha C_n^k f^{(k)}(x)\frac{1}{p^{n-k-1}}\omega^{(n-k)}(x/p)\right) \leq C.$$

Nous en déduisons donc que :

$$N\left(f_p^{(n)}\right) \leq \alpha + \frac{C}{p} \leq 1,$$

dès que p est assez grand.

III.H.2) D'après la question précédente, et III.G., dès que p est assez grand, $N(f_p') \leq \lambda_{n-1}$. Mais sur $\left[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}\right]$, $f = f_p$, et donc, si p est assez grand, et si $x \in \left[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}\right]$, on a $|f'(x)| \leq \lambda_{n-1}$. Comme p peut être choisi arbitrairement grand, on en déduit que $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

III.I. Nous prouvons très précisément l'hypothèse de récurrence H_k suivante : $H_k =$ “ Pour tout $n \geq k$, pour toute fonction f de classe C^{n-1}, de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, $f^{(k)}$ est bornée, et :

$$N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n}N(f^{(n)})^{k/n}\frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}{}''.$$

H_0 est vraie. Nous prouvons ensuite H_1, qui est vraie si f est constante. Soit donc $n \geq 1$, nous pouvons même supposer $n \geq 2$ car le cas $n = 1$ est trivial, soit f une telle fonction et $g(x) = af(bx)$ tel que :

- $N(g) \leq \lambda_n$.
- $N(g^{(n)}) \leq 1$.

Pour ce faire, nous choisissons $a = \dfrac{\lambda_n}{N(f)}$, et $b = \left(\dfrac{1}{N(f^{(n)})a}\right)^{1/n}$. D'après III.H., nous savons que $N(g') \leq \lambda_{n-1}$. Mais $g'(x) = abf'(bx)$, et donc :

$$\begin{aligned} N(f') &\leq \frac{\lambda_{n-1}}{ab} = \lambda_{n-1} \times \frac{N(f)}{\lambda_n} \times N(f^{(n)})^{1/n} \times \frac{\lambda_n^{1/n}}{N(f)^{1/n}} \\ &\leq N(f)^{1-1/n}N(f^{(n)})^{1/n}\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n^{1-1/n}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé H_1. Supposons maintenant H_k vraie (pour $k \geq 2$), et prouvons H_{k+1}. Soit $n \geq k+1$, et f comme dans les hypothèses. Si $n = k+1$, le résultat est juste, donc nous supposons $n \geq k+2$. Soit $g = f'$. Par hypothèse de récurrence (c'est-à-dire H_k appliquée à $n-1$ et à g) :

$$\begin{aligned} N(g^{(k)}) = N(f^{(k+1)}) &\leq N(g)^{1-k/n-1}N(g^{(n-1)})^{k/n-1}\frac{\lambda_{n-(k+1)}}{\lambda_{n-1}^{1-k/n-1}} \\ &\leq N(f')^{1-k/n-1}N(f^{(n)})^{k/n-1}\frac{\lambda_{n-(k+1)}}{\lambda_{n-1}^{1-k/n-1}} \end{aligned}$$

Mais nous introduisons l'inégalité prouvée ci-dessus pour f' (c'est-à-dire que nous utilisons H_1) :

$$N(g^{(k)}) \leq N(f)^{(1-1/n)(1-k/n-1)}N(f^{(n)})^{(1-k/n-1)\times 1/n}\frac{\lambda_{n-1}^{1-k/n-1}}{\lambda_n^{(1-1/n)(1-k/n-1)}}N(f^{(n)})^{k/n-1}\frac{\lambda_{n-(k+1)}}{\lambda_{n-1}^{1-k/n-1}}.$$

Il suffit de développer les calculs pour obtenir le bon résultat!! Par exemple :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n-1}\right)=1-\frac{1}{n}-\frac{k}{n-1}-\frac{k}{n}+\frac{k}{n-1}=1-\frac{k+1}{n}.$$

Quatrième Partie

IV.A. On voit bien que la fonction ψ_p "converge", en un sens à préciser, vers φ_0. Est-ce que le maximum de $T^n(\psi_p)$ converge vers le maximum de $T^n(\varphi_0)$? Analysons la situation. Pour $n=0$, le résultat ne pose pas de problèmes, puisqu'on a même égalité pour tout p. Ensuite, la "convergence" peut être mathématisée sous forme de limites d'intégrales. Il est en effet facile de vérifier que, pour tout x de [0,1] :

$$\int_0^x |\psi_p(t)-\varphi_0(t)|\,dt \leq \frac{1}{p},\qquad \int_x^1 |\psi_p(t)-\varphi_0(t)|\,dt \leq \frac{1}{p}$$

(en passant par le point $1/p$). En utilisant III.C., nous avons :

$$2\,|T\psi_p(x)-T\varphi_0(x)| \quad\leq\quad \int_0^x |\psi_p(t)-\varphi_0(t)|\,dt+\int_x^1 |\psi_p(t)-\varphi_0(t)|\,dt \leq \frac{2}{p}$$

En particulier, $(T\psi_p)$ converge uniformément sur [0,1] vers $T\varphi_0=\varphi_1$. Le résultat est donc vraie pour $n=1$, puisque $|N(T(\psi_p))-\lambda_1| = |N(T(\psi_p))-N(\varphi_1)| \leq N(T\psi_p-\varphi_1)$. Ensuite, il s'agit d'une simple récurrence, puisqu'il est bien connu que si f_j est une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors pour tout c élément de $[a,b]$, la suite de fonctions $\left(x\mapsto \int_c^x f_j(t)dt\right)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $x\mapsto\int_c^x f(t)dt$. Par suite, pour tout $n\geq 1$, et d'après III.C., $(T^n(\psi_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur [0,1] vers $T^n(\varphi_0)$, d'où on en déduit le résultat.

IV.B. L'inégalité du III.I. est optimale, car si on l'applique à $f_p=T^n\psi_p$, avec $f^{(k)}=T^{n-k}\psi_p$, en passant à la limite en p, les quantités à gauche et à droite de l'inégalité ont la même limite.