Capes 2001 - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart, et améliorée grâce aux remarques de Monsieur Jean-Luc Gauchon. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : suites récurrentes linéaires d'ordre deux, algèbre linéaire, polynômes d'endomorphismes, arithmétique, équation de Pell-Fermat, coniques

Commentaires : Il s'agit d'un problème assez complet, qui utilise de nombreux points d'algèbre et de géométrie du programme du Capes. Le niveau est conforme à ce type d'épreuves, plutôt dans la moyenne haute à la fois pour sa longueur et sa difficulté.

Partie I.

I.A.1. Evident!

I.A.2. Il n'est pas très compliqué de vérifier que l'application U est linéaire (le faire!!!). D'après la question **I.A.1.**, elle est bijective. C'est donc que U est un isomorphisme. Maintenant, $\mathbb{K}^2$ est de dimension 2, et il en est de même de $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.1.a. Si la suite (r^n) est un élément de $\mathcal{R}(a,b)$, en particulier elle vérifie l'équation de récurrence pour $n=2$, ce qui signifie exactement que r est solution de (C). Réciproquement, si r est solution de (C), alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r^{n+2} = r^n(r^2) = r^n(ar+b) = ar^{n+1} + br^n.$$

I.B.1.b. Une racine double d'un polynôme est en particulier racine du polynôme dérivé. On en déduit que $2r - a = 0$. Maintenant, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+2)r^{n+2} = nr^{n+2} + 2r^{n+2} = n(ar^{n+1}+br^n) + r^{n+1}2r = n(ar^{n+1}+br^n) + ar^{n+1} = (n+1)ar^{n+1} + br^n,$$

ce qui prouve bien que la suite (nr^n) appartient à $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.2.a. Comme $\mathcal{R}(a,b)$ est de dimension 2, et que ces deux suites sont membres de $\mathcal{R}(a,b)$, il suffit de vérifier qu'elles forment une famille libre de $\mathcal{R}(a,b)$. Soit λ et μ deux réels tels que $\lambda(r_1^n)+\mu(r_2^n)=0$. En spécialisant pour $n=0$ et $n=1$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ r_1\lambda + r_2\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système a un déterminant qui vaut $r_2 - r_1$ qui est non nul, et de second membre identiquement nul. Ses seules solutions sont $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Ce qui prouve bien que (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.2.b. Il suffit de vérifier pareillement que les deux suites forment une famille libre. Si $\lambda(r^n)+\mu(nr^n) = 0$, λ et μ sont en particulier solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ r\lambda + r\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Ses seules solutions sont $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, cqfd.
Si 0 est racine double, alors la relation de récurrence devient $u_{n+2} = 0$, ce qui implique que $u_n = 0$ dès que $n \geq 2$. Une base de $\mathcal{R}(a,b)$ est donc donnée par les suites u et v définies par :

- $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_n = 0$ dès que $n \geq 2$.
- $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_n = 0$ dès que $n \geq 2$.

I.B.2.c. Il convient déjà de vérifier que ces deux suites sont éléments de $\mathcal{R}(a,b)$. En utilisant le même raisonnement qu'à la question **I.B.2.a.**, on sait que si $n \geq 0$,

$$r^{n+2}e^{i(n+2)\alpha} = ar^{n+1}e^{i(n+1)\alpha} + br^n e^{in\alpha}.$$

Maintenant, en prenant la partie réelle, puis la partie imaginaire de cette relation, on voit que les deux suites $(r^n \cos n\alpha)$ et $(r^n \sin n\alpha)$ sont éléments de $\mathcal{R}(a,b)$. Pour montrer qu'il s'agit d'une base, on peut prouver que la seule solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda r^0 \cos(0\alpha) + \mu r^0 \sin(0\alpha) & = & 0 \\ \lambda r^1 \cos(1\alpha) + \mu r^1 \sin(1\alpha) & = & 0 \end{array} \right.$$

est $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Mais la première équation donne $\lambda = 0$, ce qui reporté dans la seconde donne aussi $\mu = 0$ car $0 < \alpha < \pi \implies \sin(\alpha) \neq 0$.

I.C.1.a. Les racines de l'équation caractérique sont :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

D'après le travail effectué jusqu'à présent, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que $F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Les conditions initiales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, nous amènent à la résolution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution de ce système est $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

I.C.1.b. Comme toujours dans la détermination de ce genre d'équivalents, on factorise par le terme dominant :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\varphi}\right)^n\right).$$

On en déduit que :

$$F_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$$

(puisque $\left|\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\varphi}\right| < 1$).

I.C.2.a. Ecrivons la matrice M_n :

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & 0 & \dots \\ 0 & \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Nous calculons le déterminant D_n en faisant un développement par rapport à la première ligne :

$$D_n = \alpha D'_{n-1} - \beta D''_{n-1},$$

où D'_{n-1} est le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ définie par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & 0 & \dots \\ 0 & \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

et D''_{n-1} est le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ définie par :

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta & 0\dots & & \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & \\ \vdots & \gamma & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour D'_{n-1}, on reconnait la matrice M_{n-1} et donc $D'_{n-1} = D_{n-1}$. Pour calculer D''_{n-1}, il est nécessaire de faire un développement par rapport à la première colonne, et on trouve facilement : $D''_{n-1} = \gamma D_{n-2}$. La relation de récurrence recherchée est donc :

$$D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}.$$

Si l'on souhaite qu'elle soit vérifiée pour $n = 0$, il est nécessaire de poser D_0 de sorte que :

$$D_2 = \alpha D_1 - \gamma\beta D_0.$$

Si $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$, D_0 peut avoir une valeur quelconque. Sinon, du fait que $D_1 = \alpha$ et $D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$, on trouve $D_0 = 1$.

I.C.2.b. Dans ce cas, la relation de récurrence devient $D_{n+2} = \alpha D_{n+1} - D_n$.

Cas $\alpha = 2$ **:** l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, et admet 1 comme racine double. La solution cherchée est donc de la forme $D_n = \lambda + \mu n$. Les conditions initiales donnent $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, d'où $D_n = n + 1$.

Cas $\alpha = \sqrt{2}$ **:** L'équation caractéristique est $r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$, dont les racines sont les complexes conjugués $e^{i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$. Nous avons donc $D_n = \lambda \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$, avec $\lambda = 1$ et $(\lambda + \mu)\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. D'où $D_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

I.C.3.a. On trouve :

$$M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 12 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

On a donc la relation $M^3 = M^2 + M$.

I.C.3.b. Nous prouvons le résultat par récurrence sur n, sachant qu'il l'est déjà pour $n = 1,2,3$. S'il est vrai à l'ordre n, alors :

$$M^{n+1} = M^n.M = (a_n M + b_n M^2)M = a_n M^2 + b_n M^3 = (a_n + b_n)M^2 + b_n M,$$

ce qui prouve le résultat à l'ordre $n + 1$ avec $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

I.C.3.c. En éliminant A dans le système précédent, on trouve que $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$, avec les conditions initiales $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. La suite (b_n) est donc la suite de Fibonacci "décalée d'un rang". Donc, pour $n \geq 1$, on a $b_n = F_{n-1}$. Bien sûr, pour $n \geq 2$, $a_n = F_{n-2}$.

I.C.3.d.i. Comme P est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable, et est donc semblable à une matrice diagonale. En outre, comme elle est de rang 2, il y a exactement 2 valeurs propres non nulles. Donc P est semblable à la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On considère alors le polynôme $f(X) = X(X-\lambda)(X-\mu)$. Un calcul facile ($D$ est diagonale!) montre que D annule ce polynôme de degré 3. Il en est de même pour P qui lui est semblable (propriété dont on peut facilement se convaincre par un calcul... en écrivant $P = QDQ^{-1}$ et en obtenant $f(P) = Qf(D)Q^{-1}$).

I.C.d.ii. De la même façon que précédemment, on va pouvoir montrer que $P^n = a_nP^2 + b_nP$ et que les suites a_n et b_n vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. Comme on va pouvoir exprimer la valeur de ces suites en fonction de n, on va bien pouvoir calculer P^n sans calculer d'autres produits de matrice que P^2 et P^3 (afin d'obtenir le polynôme annulateur de degré 3).

Partie II.

II.A.1. En donnant à y les valeurs successives de 0 à 5, on trouve que les seules solutions possibles avec $y \in [\![0,5]\!]$, sont (1,0) et (9,4).

II.A.2. Soit $M(x,y)$ un point du plan, et soient (X,Y) les coordonnées de son images $g(M)$. Un calcul facile montre que :

$$X^2 - 5Y^2 = (9x+20y)^2 - 5(4x+9y)^2 = x^2 - 5y^2.$$

M est donc sur l'hyperbole si, et seulement si $g(M)$ l'est aussi. En particulier, $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Maintenant, g est une application linéaire de déterminant 1, elle est donc bijective sur le plan, et sa restriction à $\mathcal{H}$ est injective. Mais si $M' \in \mathcal{H}$, comme g est bijective, il existe M du plan avec $g(M) = M'$. Mais le premier calcul prouve que nécessairement $M \in \mathcal{H}$. Ainsi, la restriction de g à $\mathcal{H}$ est une bijection de $\mathcal{H}$. Enfin, la vérification de $g(S_0) = S_1$ est triviale.

II.A.3.a. Par récurrence sur n, on prouve que les coordonnées de S_n sont dans $\mathbb{N}$, et que le point S_n est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$. C'est bien que les coordonnées (x_n,y_n) de S_n sont solutions de (2).

II.A.3.b. Par définition, nous avons le système de relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n=1} & = & 9x_n + 20y_n \\ y_{n+1} & = & 4x_n + 9y_n \end{array} \right.$$

En éliminant par exemple y, on prouve que $x_{n+2} = 18x_{n+1} - x_n$. La même relation a lieu pour (y_n).

II.A.3.c. On commence par avoir l'habitude de ce genre de questions. Le discriminant de l'équation caractérisitique est 320, et donc il existe des réels λ et μ tels que $x_n = \lambda(9+4\sqrt{5})^n + \mu(9-4\sqrt{5})^n$. L'aide des conditions initiales $x_0 = 1$ et $x_1 = 9$ donne $\lambda = 1/2$ et $\mu = 1/2$. De même, on trouve que :

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(9+4\sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(9-4\sqrt{5}\right)^n.$$

On peut toujours vérifier à l'aide de ces formules que pour tout n, $x_n^2 - 5y_n^2 = 1$.

II.A.4.a. C'est une question dont on a une très bonne intuition de la réponse, mais qu'il est assez pénible de rédiger si l'on souhaite être rigoureux. Remarquons d'abors (une récurrence le prouve aisément) que (x_n) et (y_n) sont deux suites strictement positives. Tous les points S_n sont donc sur

la même branche de l'hyperbole, ce qui donne un sens à l'arc (S_n,S_{n+1}). Il n'est pas plus difficile de prouver (par récurrence) que les suites (x_n) et (y_n) sont croissantes.
Dire que $M(x,y)$ est sur l'arc (S_n,S_{n+1}) revient à dire :
- $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.
- $y_n \leq y \leq y_{n+1}$.
- $M \in \mathcal{H}$.

Soit $M'(x',y') = g(M)$. Alors :
- $x_{n+1} = 9x_n + 20y_n \leq x' = 9x + 20y \leq x_{n+2} = 9x_{n+1} + 20y_{n+1}$.
- De même $y_{n+1} \leq y' \leq y_{n+2}$.
- $M' \in \mathcal{H}$ puisque $\mathcal{H}$ est stable par g.

Donc M' est sur l'arc (S_{n+1},S_{n+2}), et l'image de l'arc (S_n,S_{n+1}) par g est inclus dans l'arc (S_{n+1},S_{n+2}). Pour prouver que l'image est l'arc tout entier, on peut :
- ou bien utiliser un raisonnement de connexité : l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs.
- ou bien utiliser la réciproque g^{-1} de g : par le même raisonnement, g^{-1} envoie l'arc (S_{n+1},S_{n+2}) sur l'arc (S_n,S_{n+1}). Si $(X,Y) \in (S_{n+1},S_{n+2})$, et $(x,y) = g^{-1}(X,Y)$, alors $(x,y) \in (S_n,S_{n+1})$ et $g(x,y) = (X,Y)$: tous les points de l'arc (S_{n+1},S_{n+2}) sont atteints!

II.A.4.b. On suppose que tel n'est pas le cas, et on suppose l'existence d'une solution (x,y) de (2) d'abscisse minimale. On encadre x par $x_n < x < x_{n+1}$ (remarquons que $n \geq 1$). Soit $(x',y') = g^{-1}(x,y)$. Comme g est de déterminant 1, g^{-1} est une application lin'éaire dont la matrice est à coefficients dans les entiers, et x', y' sont des entiers. Le travail effectué précédemment permet d'affirmer que (x',y') est solution de (2). Mais la question précédente nous dit que ce point (x',y') est sur l'arc de courbe d'extrémité S_{n-1} et S_n. En particulier, on a : $x' < x_n < x$. Ceci est contradictoire avec le fait que l'on a supposé que (x,y) était d'abscisse minimale.

II.B.1. Nous utilisons l'indication de l'énoncé, c'est-à-dire que nous considérons un repère porté par les asymptotes de l'hyperbole, et normé de sorte que l'équation de l'hyperbole $\mathcal{L}$ soit $xy = 1$ (remarque : toutes les hyperboles sont équivalentes par une application affine). Soit ψ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ une application affine qui vérifie $\psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. On a :

$$\psi(x,y) = (ax + by + c, dx + ey + f),$$

où a,b,c,d,e,f sont des constantes. On distingue deux cas :
- Soit ψ est constante, dans ce cas, ψ s'écrit $\psi(x,y) = (c,1/c)$, où c est un réel non nul.
- Soit ψ n'est pas constante, et comme $\psi(\mathcal{L})$ ne peut être une droite, ce sera nécessairement l'hyperbole $\mathcal{L}$ elle-même. En particulier, le centre de l'hyperbole, qui est aussi le centre du repère, doit être préservé, et donc on sait que $c = f = 0$. La condition $\psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ impose en outre que, pour tout point $(x,1/x)$ de $\mathcal{L}$, $\psi(x,1/x)$ est sur $\mathcal{L}$, et donc :

  $$(dx + e/x)(ax + b/x) = 1,$$

  ce qui se réécrit en

  $$\left(adx^2 + \frac{eb}{x^2}\right) + (ae + bd) = 1,$$

  cette égalité étant vraie pour tout x de $\mathbb{R}$ non nul. Par unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (pourquoi pas, après tout???), on obtient que :

  $$\begin{cases} ad = 0 \\ eb = 0 \\ ae + bd = 1 \end{cases}$$

On obtiendra donc dans ce cas deux types de fonctions :

1. Si $a = 0$ et $e = 0$, l'application ψ est donnée par :
$$\psi(x,y) = (y/d,dx),$$
où d est un réel non nul.
2. Si $b = 0$ et $d = 0$, l'application ψ est donnée par :
$$\psi(x,y) = (x/e,ey),$$
où e est un réel non nul. (remarque : les deux autres cas ($a = 0$, $d = 0$) et ($b = 0$, $e = 0$) sont impossibles)

II.B.2. Chacun des trois types d'application précédente donnera une fonction :

1. Si ψ est constante, nécessairement l'image de ψ est le point B.
2. Si $\psi(x,y) = (d/y,dx)$, et si on pose $A = (x_0,1/x_0)$ et $B = (x_1,1/x_1)$ la condition $d = 1/(x_0x_1)$ est nécessaire et suffisante pour que la fonction ψ envoie A sur B. Dans ce cas, il est trivial de vérifier que ψ est involutive, c'est-à-dire que $\psi \circ \psi = Id_{\mathcal{P}}$.
3. Le dernier cas se traite de façon identique, et on obtient une application non involutive.

II.B.3. Il y donc 3 applications affines qui préservent $\mathcal{H}$ et envoie S_0 sur S_1. Mais l'une d'elles est involutive, et une autre est constante, et ne vérifie donc pas $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. g est donc le seul choix possible.

Partie III.

III.A. Question facile! Il est impératif de savoir programmer sa calculatrice pour calculer diverses valeurs d'une suite récurrente, ainsi que de savoir appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux nombres. Ici, on trouve :
$$u_{15} = -89,\ u_{30} = -24475,\ u_{45} = -3814273.$$
Pour calculer le pgcd de u_{30} et u_{45} on applique l'algorithme d'Euclide (rappelons que le pgcd est le premier reste non nul).
$$\begin{aligned}
3814273 &= 24475 \times 155 + 20648\\
24475 &= 20648 \times 1 + 3827\\
20648 &= 3827 \times 5 + 1513\\
3827 &= 1513 \times 2 + 801\\
1513 &= 801 + 712\\
801 &= 712 + 89\\
712 &= 89 \times 8
\end{aligned}$$
Le pgcd recherché est dont 89, ce qui est au signe près la valeur de u_{15}. Mais comme la définition donnée par l'énoncé manque de précision, et que le pgcd est donné au signe près....

III.B.1. Soit $n \in k\mathbb{N}$, ie $n = kq$, où q est un entier. Si $n - j \in k\mathbb{N}$, alors $n - j = kq'$, et donc $j = k(q - q')$. En particulier, $n + j \in\ k\mathbb{N}$. La réciproque se fait de façon exactement identique.

III.B.2. D'abord, on remarque que $k\mathbb{N} \subset A$. En effet, $0 = k - k \in A$, et donc $2k = k + k \in A$. On montre ainsi par récurrence que pour tout q de $\mathbb{N}$, kq est dans A, en écrivant $kq = (q - 1)k + k$.
Réciproquement, on suppose que A n'est pas contenu dans $k\mathbb{N}$, et on considère $l \in A - k\mathbb{N}$, l le plus petit possible. Alors $kq < l < k(q + 1)$, pour un $q \geq 0$. Maintenant, $l - kq \in [\![0,kq]\!]$, et $kq + (l - kq) = l$ est dans A. Donc, comme A est autosymétrique, $m = kq - (l - kq)$ est dans A. Mais $m < l$, et $m \notin k\mathbb{N}$. Ceci contredit la minimalité de l.

III.C.1.a. On procède par récurrence *double* sur k. Remarquons que la propriété est trivialement vérifiée pour $k = 0$, et que pour $k = 1$, la relation de récurrence nous donne $u_{n+1} - qu_{n-1} = pu_n$, et donc d divise bien le membre de gauche de l'égalité. Maintenant, si on suppose la propriété vraie pour les entiers $k - 1$ et k, et que nous voulons la prouver pour l'entier $k + 1$, alors on écrit deux fois la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+k+1} &= pu_{n+k} + qu_{n+k-1} \\ u_{n-(k-1)} &= pu_{n-k} + qu_{n-(k+1)} \end{aligned}$$

La seconde équation donne en particulier :

$$(-q)u_{n-(k+1)} = pu_{n-k} - u_{n-(k-1)}.$$

En combinant, nous trouvons :

$$u_{n+k+1} + (-q)^{k+1}u_{n-(k+1)} = p(u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}) + q(u_{n+(k-1)} + (-q)^{k-1}u_{n-(k-1)}).$$

L'hypothèse de récurrence donne bien que d divise la quantité voulue.

III.C.1.b. D'abord, si d divise u_{n-k} alors la relation précédente prouve que d divise u_{n+k}. Réciproquement, si d divise u_{n+k}, on obtient que d divise $(-q)^k u_{n_k}$, et comme d est premier avec q, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer qu'en fait d divise u_{n-k}.

III.C.2.a. Nous écrivons $u_{n+1} - pu_n = pu_n + qu_{n-1} - pu_n = qu_n$, et donc si c est un diviseur premier de q, c'est en particulier un diviseur premier de $u_{n+1} - pu_n$.
Supposons alors qu'il existe un élément u_{n_0}, avec $n_0 \neq 0$, tel que $c|u_{n_0}$, et on choisit ce n_0 le plus petit possible. Remarquons que $n_0 > 1$, car $u_1 = 1$. Nous appliquons la relation que nous venons de démontrer à $n = n_0 - 1$. Nous trouvons donc : $c|u_{n_0} - pu_{n_0-1}$. Comme nous savons déjà que $c|u_{n_0}$, nous obtenons que $c|pu_{n_0-1}$. Mais c est un nombre premier, et par hypothèse de minimalité de n_0, nous savons qu'il ne divise pas u_{n_0-1}. Donc $c|p$. Ceci est absurde, car c est aussi un facteur premier de q, et il est supposé que p et q sont premiers entre eux.

III.C.2.b. Soit c un facteur premier commun à d et q. D'après le résultat de la question précédente (où on peut à vrai dire très bien se passer de l'hypothèse q non premier), nous savons que $A(c) = \{0\}$. Maintenant, il est clair que nous avons l'inclusion $A(d) \subset A(c)$ puisque $c|d$.

III.D.1. Comme $m,n \in A(D)$, $A(D) \neq \{0\}$, et d'après les questions précédentes, $A(D)$ est une partie autosymétrique. Donc $A(D) = k\mathbb{N}$. Or $k|m$ et $k|n$, donc $k|m \wedge n = d$, ce qui signifie que $d \in A(D)$. Ceci est le résultat souhaité, et la preuve est correcte dans le cas où $D > 0$, c'est-à-dire que u_n et u_m ne sont pas tous les deux nuls.
Si $u_n = u_m = 0$, le raisonnement précédent reste valable avec $A(0) = \{l \in \mathbb{N};\ u_l = 0\}$, à condition de prouver que cette partie est autosymétrique. Mais si $u_l = 0$, pour tout entier $m > 0$, **III.C.1.** donne $m|(u_{l+k} + (-q)^k u_{l_k}$. Donc $u_{l+k} + (-q)^k u_{l-k} = 0$. En particulier, $u_{l-k} = 0 \iff u_{l+k} = 0$.

III.D.2. Quitte à considérer $-u_d$, on peut supposer $u_d \geq 0$. Si $u_d > 0$, comme $d \in A(u_d)$, ses multiples m et n sont aussi éléments de $A(u_d)$ (partie autosymétrique). En particulier, $u_d|u_m$ et $u_d|u_n$. Donc $u_d|D$. Si $u_d = 0$, le même raisonnement s'applique avec $A(0)$ défini ci-dessus.

III.D.3. Les deux questions précédentes permettent d'affirmer que $D = u_d$ (au signe près).

Partie IV.

IV.A. Voici les représentations obtenues :

$$\overline{10000100},\ \overline{10000011},\ \overline{1100100},\ \overline{1100011},\ \overline{1011100},\ \overline{1011011}.$$

Seule la première est une Z-représentation.

IV.B. Nous prouvons ces égalités par récurrence sur n. Par exemple, $\sigma_0 = \nu_0 = 1 = \nu_1 - 1$, et $\sigma_1 = \nu_1 = \nu_2 - 1$. Maintenant, si la première égalité est vraie au rang n, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+2} &= \sum_{k=0}^{s+1} \nu_{n+2-2k} \\ &= \sum_{k=-1}^{s} \nu_{n-2k} \\ &= \sigma_n + \nu_{n+2} = \nu_{n+1} + \nu_{n+2} - 1 = \nu_{n+3} - 1.\end{aligned}$$

La récurrence permet donc de passer des rangs de deux en deux, et comme elle a été amorcée au rang 0 et au rang 1, la relation est vraie pour tout n. Pour la deuxième relation, une récurrence simple suffit (on peut aussi se passer de récurrence en écrivant $S_n = \sigma_n + \sigma_{n-1}$).

IV.C.1.a. Nous procédons (par exemple) par récurrence sur le nombre de chiffres d'une représentation de Zeckendorff (autrement dit sur n). L'inégalité est par exemple vérifiée si $n = 1$. Si elle est vraie pour tout entier k inférieur ou égal à $n-1$, soit m un entier s'écrivant $\sum_{k=0}^{n} a_k \nu_k$, avec $a_n \neq 0$. Alors $\sum_{k=0}^{n-2} a_k \nu_k$ est une Z-représentation de $m - \nu_n$, et par hypothèse de récurrence : $m - \nu_n \leq \sigma_{n-2}$. Ceci entraîne que $m \leq \sigma_n$.

IV.C.1.b. Déjà, on sait que $\nu_n \leq m$. Ensuite, on a : $m \leq \sigma_n = \nu_{n+1} - 1$. D'où le résultat.

IV.C.2. Nous prouvons l'existence d'une Z-représentation par récurrence sur m. Le résultat est clair si $n = 1$. Soit désormais m un entier. Soit ν_n le plus grand des nombres de Fibonacci inférieurs ou égaux à m. On pose $m' = m - \nu_n$. Si $m' = 0$, on a le résultat. Soit $\sum_{k=0}^{n'} a_k u_k$ une Z-représentation de m'. Alors $\nu_n + \sum_{k=0}^{n'} a_k u_k$ est une Z-représentation de m pourvu qu'on prouve que $n' \leq n - 2$. Mais si $n' \geq n - 1$, alors $m \geq \nu_n + \nu_{n-1} = \nu_{n+1}$, ce qui est impossible.

Supposons que les Z-représentations ne sont pas uniques. On considère m le plus petit entier pour lequel on n'a pas unicité, et ν_n le plus grand des nombres de Fibonacci plus petits que m. D'après la question IV.C.1.a. et IV.B., une Z-représentation de m commence nécessairement par ν_n. Alors $m - \nu_n$ est un entier strictement plus petit qui admet lui aussi deux Z-représentations. C'est absurde!

IV.C.3.
```
Mettre tous les a[k] à 0
Tant que m non nul faire
  k=0
  tant que nu[k]<=m faire k=k+1. fin tant que.
  a[k-1]=0.
  m=m-nu[k-1]
Fin tant que.
```

IV.C.4. Voici, sans autre justification que le fait de faire tourner l'algorithme, ou d'effectuer une récurrence, les résultats demandés :

$$\begin{aligned}272 &= \overline{100010001000} \\ \text{Si } n \text{ est pair, } S_n &= \overline{10101\ldots100} \\ \text{Si } n \text{ est impair, } S_n &= \overline{10101\ldots1001} \\ \sigma_n &= \overline{10101\ldots}\end{aligned}$$

IV.C.5. Partant de :

$$\nu_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2},$$

et de :

$$\nu_{z(m)} \leq m \leq \nu_{z(m)+1},$$

nous prouvons que

$$z(m) \sim \frac{\log(m)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

De la même façon, on obtient que :

$$d(m) \sim \frac{\log(m)}{\log 10}.$$

On obtient donc en conclusion que :

$$\frac{z(m)}{d(m)} \sim \frac{\log 10}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

IV.D.1. D'abord, nous montrons par récurrence (double) que σ_n n'admet qu'une seule représentation de Fibonacci. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat est clair. Maintenant, on écrit $\sigma_{n+2} = \nu_{n+2} + \sigma_n$. Une représentation de Fibonacci de σ_{n+2} peut s'obtenir :

- soit en mettant bout à bout ν_{n+2} et une représentation de Fibonacci de σ_n : on en obtient une de la sorte.
- soit en écrivant $\sigma_{n+2} = \nu_{n+2} + \nu_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k\nu_k \geq \nu_{n+3} > \sigma_{n+2}$, ce qui est absurde.
- soit en écrivant $\sigma_{n+2} = \sum_{0\leq k\leq n+1} a_k\nu_k \leq \nu_1 + \cdots + \nu_{n+1} \leq \nu_{n+3} - 2 < \sigma_{n+2}$, ce qui est absurde.

D'autre part, si $m \neq \sigma_n$ pour tout n, la représentation de Zeckendorff de m possède nécessairement un passage du type 100. On peut remplacer ce passage par 011. Il y a donc au moins deux représentations de Fibonacci.

IV.D.2. Nous savons que $\nu_{n+2} = S_n + 2$. Une représentation de Fibonacci de ν_{n+2} :

- ou bien commence par ν_{n+2}, et est alors exactement ν_{n+2}.
- ou bien commence par ν_{n+1}. On écrit alors $\nu_{n+2} = \nu_{n+1} + \nu_n$. Toute représentation de ν_n donnera alors par cette écriture une représentation de ν_{n+2}.

On obtient donc la relation de récurrence $\delta(\nu_{n+2}) = \delta(\nu_n)+1$, ce qui donne $\delta(\nu_{2k}) = k$ et $\delta(\nu_{2k+1}) = k$.

IV.D.3. Soit m dans $[\![\nu_n - 1, \nu_{n+1} - 1]\!]$, et $s(m)$ son symétrique par rapport au centre de l'intervalle. Nous avons :

$$\begin{aligned} m + s(m) &= \nu_n - 1 + \nu_{n+1} - 1 \\ &= \nu_{n+2} - 2 \\ &= S_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \nu_k. \end{aligned}$$

Comme $m < \nu_{n+1}$, une représentation de Fibonacci de m comporte au plus $n+1$ chiffres. Soit donc $\sum_{0\leq k\leq n} a_k\nu_k$ une représentation de Fibonacci de m. Alors $\sum_{0\leq k\leq n}(1-a_k)\nu_k$ est une représentation de Fibonacci de $s(m)$, et on peut symétriquement passe d'une représentation de Fibonacci de $s(m)$ à une représentation de Fibonacci de m : on a bien $\delta(s(m)) = \delta(m)$!