Capès 2001 - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart et est disponible à l'adresse suivante : http://mathweb.free.fr . Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Partie I.

I.1. Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = [f(x/2)]^2$, ce qui prouve bien que $f(x)$ est positif ou nul.

I.2. Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) = f(x + 0) = f(0)f(x) = 0$, et donc la fonction est identiquement nulle.

I.3. En faisant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on voit que $f(0)$ vérifie l'équation :

$$f(0) = f(0)^2.$$

Les seules solutions de cette équation sont 0 et 1. Mais comme on a supposé que f n'est pas identiquement nulle, la question précédente impose que $f(0) = 1$.

I.4. Nous prouvons par récurrence sur n que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$f(nx) = [f(x)]^n.$$

Ceci est vrai si n vaut 0, ou 1. Si le résultat est vrai à l'entier n, alors, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)f(x) = [f(x)]^{n+1}.$$

En posant $y = \frac{x}{n}$, et en écrivant $f(ny) = [f(y)]^n$, on peut prouver que :

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = [f(x)]^{1/n}.$$

I.5. Le problème nous guide bien! D'une part :

$$f(q(rx)) = f(px) = [f(x)]^p.$$

D'autre part :

$$f(q(rx)) = [f(rx)]^q.$$

Par identification, on trouve :

$$f(rx) = [f(x)]^r,$$

pour tout rationnel r, et tout x de $\mathbb{R}^+$.

I.6.1 Remarquons que $f(\alpha) = f(\alpha/2 + \alpha/2) = f(\alpha/2)f(\alpha/2)$, et donc si f s'annule en α alors f s'annule en $\alpha/2$. Nous définissons donc une suite par $x_n = \frac{\alpha}{2^n}$, et une récurrence aisée montre que f s'annule en chaque x_n.

I.6.2 On s'inspire de la question **I.2.** Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Comme la suite (x_n) converge vers 0, il existe un entier n tel que $x_n \leq x$. On écrit alors $x = (x - x_n) + x_n$, avec $x - x_n$, $x_n \in \mathbb{R}^+$. On obtient :

$$f(x) = f(x - x_n + x_n) = f(x - x_n)f(x_n) = 0.$$

La fonction est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. (Remarque : on ne peut rien dire de ce qui se passe en zéro!).

I.7. L'idée est que, avec la question **I.5.**, on connait bien la valeur de f pour tout rationnel en fonction, par exemple de $f(1)$, et l'hypothèse de continuité va permettre de trouver la valeur de f pour tout réel. Précisément, comme f est strictement positive, la fonction exponentielle réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, il existe un réel a tel que :

$$f(1) = e^a.$$

Maintenant, si r est un rationnel quelconque, alors :

$$f(r) = [f(1)]^r = e^{ra},$$

d'après les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle. Si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une suite (r_n) de rationnels plus grands que x, qui converge vers x. L'hypothèse de continuité à droite nous dit que :

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x).$$

Mais, $f(r_n) = e^{ar_n}$, et cette quantité converge vers e^{ax}. Donc $f(x) = e^{ax}$.

I.8. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^+$, qu'on supposera non nul, et $x > x_0$. On écrit $f(x) = f(x - x_0)f(x_0)$. Maintenant, si x converge vers x_0 par valeurs supérieures, $x - x_0$ converge (par valeurs supérieures) vers 0, et par continuité à droite en 0, la quantité $f(x - x_0)f(x_0)$ converge vers $f(0)f(x_0) = f(x_0)$ (on rappelle que $f(0) = 1$). C'est bien que f est continue à droite en x_0. En utilisant la question précédente, on conclut que $f(x) = e^{ax}$ pour un certain réel a, pour tout x.

I.9.1 On suppose donc que pour tout y de $[A,B]$, alors $f(y) \leq M$. Soit $x \in [0,B - A]$. On utilise d'abord le point A comme point d'appui :

$$f(A + x) = f(A)f(x),$$

et donc

$$f(x) = \frac{f(A + x)}{f(A)} \leq \frac{M}{f(A)}.$$

(il n'y a pas de problèmes avec les inégalités car tout est positif) Donc f est majoré sur $[0,B-A]$. Pour montrer qu'elle est minorée avec une borne strictement positive, on utilise le point B comme point d'appui. On obtient :

$$f(B) = f(B - x + x) = f(B - x)f(x),$$

ce qui implique :

$$f(x) = \frac{f(B)}{f(B - x)} \geq \frac{f(B)}{M} > 0.$$

I.9.2. Soit $m,M > 0$ tels que, pour tout x de $[0,B - A]$, alors :

$$0 < m \leq f(x) \leq M.$$

Nous prouvons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que, pour tout x dans l'intervalle $\left[0,\frac{B-A}{2^n}\right]$, alors :

$$m^{1/2^n} \leq f(x) \leq M^{1/2^n}.$$

En effet, si x est dans un tel intervalle, alors $2x \in \left[0,\frac{B-A}{2^{n-1}}\right]$, et en utilisant $f(x)^2 = f(2x)$ et l'hypothèse de récurrence, on vérifie le résultat souhaité.

Maintenant, si n tend vers $+\infty$, alors $m^{1/2^n}$ et $M^{1/2^n}$ convergent tous deux vers 1, ce qui achève de prouver que f est continue à droite en 0.

Partie II.

II.1.1 On décompose le carré C_R en deux triangles, T_R et un autre triangle. Les seuls points litigieux vont être sur la diagonale. Soit donc (t_0,x_0) un point de C_R. On distingue trois cas :

- Si $0 \leq t_0 < x_0 \leq R$, alors il existe un petit voisinage V de (t_0,x_0) tel qu'en tout point (t,x) de ce voisinage, on a toujours $0 \leq t < x \leq R$. Alors, $\psi(t,x) = \varphi(t,x) - \varphi(t,t)$, et comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en (t_0,x_0) et en (t_0,t_0), alors ψ est aussi continue en (t_0,x_0).
- Si $0 \leq x_0 < t_0 \leq R$, le même raisonnement s'applique, cette fois la fonction ψ est identiquement nulle sur un voisinage de (t_0,x_0).
- Reste le cas des éléments diagonaux, c'est-à-dire que $0 \leq t_0 = x_0 \leq R$. On a $\psi(t_0,x_0) = 0$. Il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $|t - t_0| < \delta_1$, $|x - x_0| < \delta_2$, alors $|\psi(t,x)| \leq \varepsilon$.
  Soit donc $\varepsilon > 0$. La fonction φ est continue au point (t_0,t_0) et donc il existe $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tels que : pour tous points $(t,x) \in T_R$ tels que $|t - t_0| < \delta_1$, $|x - x_0| < \delta_2$ impliquent $|\varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0)| \leq \varepsilon$.
  Pour tous points (t,x) de C_R tels que $|t - t_0| < \delta_1$, $|x - x_0| < \delta_2$, alors :
  1. Si $(t,x) \in T_R$, alors par définition de δ_1 et δ_2, on a : $|\psi(t,x)| \leq \varepsilon$.
  2. Si $(t,x) \notin T_R$, alors $\psi(t,x) = 0$ et en particulier $|\psi(t,x)| \leq \varepsilon$

Toutes ces considérations prouvent bien que ψ est continue sur C_R.

II.1.2 Pour $z \in [0,R]$, on note $F(z) = \int_0^z \left(\int_0^x k(t)dt\right) dx$ et $G(z) = \int_0^z \left(\int_t^z k(t)dx\right) dt$. Nous suivons les indications de l'énoncé, et commençons par dériver F. Il n'y a pas de difficultés particulières, car on peut écrire $F(z) = \int_0^z K(x)dx$, où $K(x) = \int_0^x k(t)dt$ est une fonction continue sur $[0,R]$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on obtient :

$$F'(z) = K(z) = \int_0^z k(t)dt.$$

Pour G, la dérivation est plus délicate, car la fonction dans l'intégrande dépend aussi de la borne (autrement dit, $G(z) = \int_0^z H(t,z)dt$). Nous pourrions évoquer un théorème très général de dérivation sous l'intégrale, puis utiliser le théorème donnant la dérivée de la composée de deux fonctions. Nous préférons une méthode plus élémentaire, qui a la chance de fonctionner ici. Déjà, on remarque que :

$$\int_t^z k(t)dx = (z - t)k(t).$$

En effet, l'intégrande $k(t)$ ne dépend pas de la variable d'intégration x. Il vient :

$$G(z) = \int_0^z zk(t)dt - \int_0^z tk(t)dt = z\int_0^z k(t)dt - \int_0^z tk(t)dt.$$

On utilise cette fois simplement le théorème fondamental du calcul intégral, et la dérivation d'un produit de fonctions, pour obtenir :

$$G'(z) = \int_0^z k(t)dt + zk(z) - zk(z) = \int_0^z k(t)dt.$$

Les dérivées de F et G sont donc égales sur l'intervalle $[0,R]$, ce qui signifie que les fonctions F et G diffèrent d'une constante sur cet intervalle. Maintenant, on remarque que $F(0) = G(0) = 0$, ce qui prouve bien l'égalité demandée.

II.1.3 Nous partons du membre de gauche de l'égalité (2), et remplaçant $\varphi(t,x)$ par $\psi(t,x) + \varphi(t,t)$. On obtient :

$$\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t,x)dt\right) dx \quad = \quad \int_0^R \left(\int_0^x \psi(t,x) + \varphi(t,t)dt\right) dx$$

Nous remarquons que :

$$\int_0^x \psi(t,x)dt = \int_0^R \psi(t,x)dt,$$

car $\psi(t,x) = 0$ si $t \geq x$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t,x)dt\right) dx &= \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)dt\right) dx + \int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t,t)dt\right) dx \\ &= \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)dx\right) dt + \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t,t)dx\right) dt,\end{aligned}$$

où pour obtenir la dernière égalité on a utilisé le théorème de Fubini (le rappel du sujet en début de partie II), et la question **II.1.2**, avec $k(t) = \varphi(t,t)$ et $z = R$. Il suffit en suite de remonter les calculs dans l'autre sens, en utilsant notamment que

$$\int_0^R \psi(t,x)dx = \int_t^R \psi(t,x)dt,$$

pour obtenir l'égalité (2).

II.2.1. Décryptons la question : il faut prouver que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, alors la fonction $f * g$ est elle aussi continue. Il n'y a pas de théorème immédiat qui s'applique, comme le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, car une des bornes dépend aussi de ce paramètre. Nous allons procéder “à la main”. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$, et x un autre élément de $\mathbb{R}^+$ tel que $|x - x_0| \leq 1$. Pour fixer les idées, nous supposerons que $x \geq x_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous calculons :

$$f * g(x) - f * g(x_0) = \int_0^{x_0} (f(x-t) - f(x_0 - t))g(t)dt + \int_{x_0}^x f(x-t)g(t)dt.$$

D'une part, si t est dans l'intervalle $[x_0,x]$, alors $x - t$ se situe dans $[0,1]$, qui est un intervalle compact. f, qui est continue, est bornée par une constante M sur cet intervalle, et g est bornée sur $[0,x_0 + 1]$ par une autre constante M'. Donc pour tout x tel que $0 \leq x - x_0 \leq 1$, on a :

$$\left|\int_{x_0}^x f(x-t)g(t)dt\right| \leq M.M'|x - x_0|.$$

D'autre part, f est continue sur $[0,x_0]$ qui est compact, donc elle est uniformément continue sur ce compact (c'est le théorème de Heine). Il existe donc $\eta > 0$ tel que $|y - y'| \leq \eta \implies |f(y) - f(y')| \leq \varepsilon$. Donc, si $|x - x_0| \leq \eta$, on a : $|(x - t) - (x_0 - t)| \leq \eta$, et ceci implique :

$$\left|\int_0^{x_0} (f(x-t) - f(x_0 - t))g(t)dt\right| \leq M'\epsilon.$$

Ces deux inégalités impliquent la continuité de $f * g$ en x_0.

II.2.2 On applique l'égalité (2) à la fonction $\varphi(t,x) = f(x-t)g(t)$:

$$\begin{aligned}\int_0^R f * g(x)dx &= \int_0^R \left(\int_t^R f(x-t)g(t)dx\right) dt \\ &= \int_0^R g(t) \left(\int_t^R f(x-t)dx\right) dt \\ &= \int_0^R g(t) \left(\int_0^{R-t} f(x)dx\right) dt\end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient par le changement de variables $u = x - t$.

II.2.3. Comme f est positive, on a :

$$\int_0^{R-t} f(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx,$$

et l'inégalité de droite se déduit immédiatement de la question précédente. Concernant l'inégalité de gauche, on remarque simplement que :

$$\int_0^R g(t)\left(\int_0^{R-t} f(x)dx\right)dt \geq \int_0^{R/2} g(t)\left(\int_0^{R-t} f(x)dx\right)dt.$$

Maintenant, si $0 \leq t \leq R/2$, alors $R-t \geq R/2$, et :

$$\int_0^{R/2} g(t)\left(\int_0^{R-t} f(x)dx\right)dt \geq \int_0^{R/2} g(t)\left(\int_0^{R/2} f(x)dx\right)dt \geq \int_0^{R/2} f(x)dx \int_0^{R/2} g(t)dt.$$

II.2.4 Il s'agit simplement d'une application du théorème des gendarmes! Si R tend vers $+\infty$, le membre de gauche et le membre de droite de l'inéqualité de **II.2.3.** convergent tous les deux vers la même limite qui est :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

Il en est de même du terme au centre!

II.3.1.

$$f_\lambda^{*2}(x) = \int_0^x \lambda e^{\lambda x - \lambda t}\lambda e^{\lambda t}dt = \int_0^x \lambda^2 e^{\lambda x}dt = \lambda^2 x e^{\lambda x}.$$

II.3.2. Nous prouvons par récurrence sur n que :

$$f_\lambda^{*n}(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}.$$

Le résultat est en effet vérifié aux rangs 1,2, et s'il est vrai à l'ordre n :

$$\begin{aligned} f_\lambda^{*(n+1)}(x) &= \int_0^x \lambda^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x - \lambda t}\lambda e^{\lambda t}dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\int_0^x (x-t)^{n-1}dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Partie III.

III.1.1 C'est un calcul simple !

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{si } x \geq 0.$$

Remarquons que, comme toute fonction de répartition, F_X est croissante, comprise entre 0 et 1, et de limite 1 en $+\infty$.

III.1.2. En appliquant la formule de Bayes :

$$P((X > s+t)|(X > t)) = \frac{P(X > s+t \cap X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)},$$

car si $X > s+t$, alors automatiquement $X > t$ et donc les événements $(X > s+t \cap X > t)$ et $(X > s+t)$ sont égaux. Comme $P(X > s+t) = 1 - F_X(s+t) = e^{-\lambda s - \lambda t}$ et $P(X > t) = e^{-\lambda t}$, on obtient :

$$P((X > s+t)|(X > t)) = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

III.2.1. Il suffit de remarquer que $G_T(x) = P(T > t)$, et (3) se traduit immédiatement en l'équation fonctionnelle (1) pour G_T en appliquant la formule de Bayes.

III.2.2. Nous allons appliquer le résultat de la partie **I.** à G_T : en effet, G_T vérifie l'équation fonctionnelle, est non identiquement nulle (elle vaut 1 en 0), et est majorée par 1. Il existe donc un réel a tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, alors $G_T(x) = e^{ax}$, ce qui entraîne $F_T(x) = 1 - e^{ax}$. En utilisant le résultat de la question **III.1.1.** et le rappel, on voit que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle (de paramètre a).

III.3.1. S_n est la somme des temps d'attente. Elle représente donc le temps d'attente du n-ième message pour le réseau, à partir de l'instant initial.

III.3.2. Si aucun message n'est arrivé entre les instants 0 et t, c'est que $S_1 > t$. La probabilité recherchée est donc :

$$P(S_1 > t) = 1 - P(S_1 \leq t) = e^{-\lambda t}.$$

III.3.3. De même, la probabilité recherchée est ici :

$$P(S_2 > t) = \int_t^{+\infty} f_\lambda^{*2}(x)dx = \int_t^{+\infty} \lambda^2 x e^{\lambda x} dx.$$

Nous réalisons une intégration par parties pour calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned} P(S_2 > t) &= \left[-\lambda x e^{\lambda x}\right]_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \lambda e^{\lambda x} \\ &= (1+\lambda t)\, e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

III.3.4. Il s'agit de calculer $P(S_{n+1} > t)$, ce que nous réalisons à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} > t) &= \int_t^{+\infty} \lambda^{n+1} \frac{x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\lambda^n \frac{x^n}{n!} e^{-\lambda x}\right]_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + P(S_n > t) \end{aligned}$$

Par une récurrence élémentaire, amorcée aux questions précédentes, on trouve :

$$P(S_{n+1} > t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) e^{-\lambda t}.$$

On remarque que cette quantité est bien comprise entre 0 et 1, et que si n tend vers $+\infty$, la probabilité tend vers 1, ce qui est conforme à l'intuition.

III.3.5. C'est encore une question qui fait appel à un raisonnement probabiliste, et à ce titre cette partie est assez délicate si l'on n'a pas l'habitude de tels raisonnements. Pour k un entier, on note B_k l'événement : "au plus k messages sont arrivés entre les instants 0 et t", et C_k l'événement : " exactement k messages sont arrivés entre les instants 0 et t". L'événement "au plus n messages" est la réunion disjointe des événements "au plus n-1 messages" et "exactement n messages". Autrement dit :

$$P(B_n) = P(B_{n-1}) + P(C_n).$$

Maintenant, nous avons calculé $P(B_n)$ à la question précédente. Le résultat recherché est donc :

$$P(C_n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

III.3.6. La seule difficulté est de décrypter la question : il s'agit d'obtenir la valeur de $P(N_t = n)$ pour tout entier naturel n. Mais cette probabilité a déjà été calculé à la question précédente. La loi de probabilité de N_t est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

Remarquons qu'au début de la partie suivante, on étudie une variable aléatoire dont la loi de probabilité est une loi de Poisson, ce qui correspond au cas que nous avons trouvé ici avec $t = 1$. Cela nous donne confiance quand à la validité de nos calculs!

Partie IV.

IV.1. M_n désigne le nombre maximum de messages arrivés par unité de temps du type $[k,k+1[$, pour $k = 0,\dots,n-1$.

IV.2. L'événement M_n est l'intersection des événements $(A_1 \leq m) \cap \cdots \cap (A_n \leq m)$. Ces événements sont indépendants car les variables aléatoires le sont. Donc :

$$P(M_n \leq m) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k \leq m) = F_Y(m)^n = (1 - G_Y(m))^n.$$

IV.3.1. Comme Y est une loi discrète, sa fonction de répartition F_Y vérifie :

$$F_Y(m) = \sum_{k=0}^{m} P(Y = k).$$

Donc,

$$G_Y(m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.$$

En particulier, la série est plus grande qu'un des ses termes, et :

$$G_Y(m) \geq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}.$$

D'autre part, pour si $k \geq m+1$, on écrit $k = m+1+j$ avec $j \geq 0$, et :

$$\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} = \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1+j}}{(m+1)!(m+2)...(m+j+1)} \leq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\mu^j}{(m+2)^j}.$$

Donc,

$$G_Y(m) \leq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu^j}{(m+2)^j} = \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{\mu}{m+2}}.$$

IV.3.2. Si m tend vers plus l'infini, alors $\dfrac{1}{1-\frac{\mu}{m+2}}$ tend vers 1, et donc :

$$G_Y(m) \sim_{+\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}.$$

IV.3.3. On remplace $G_Y(m)$ par son équivalent (il est possible de multiplier/diviser des équivalents), et donc :

$$\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)} \sim \frac{e^{-\mu}\mu^{m+2}}{(m+2)!}\frac{(m+1)!}{e^{-\mu}\mu^{m+1}} = \frac{\mu}{m+1}.$$

IV.4.1. Si x appartient à l'intervalle $[k,k+1[$, alors on peut écrire :

$$G_C(x) = G_Y(k)\left(\frac{G_Y(k+1)}{G_Y(k)}\right)^{x-k}.$$

Cette expression suffit à prouver que G_Y est continue sur $]k,k+1[$, et est continue à droite en chaque entier. Pour prouver la continuité à gauche pour chaque entier, il suffit de remarquer que :

$$\lim_{x\to(k+1)^-} G_C(x) = G_y(k)\left(\frac{G_Y(k+1)}{G_Y(k)}\right) = G_Y(k+1) = G_C(k+1).$$

IV.4.2. Comme $G_Y(k+1) < G_Y(k)$, et que $x-[x]$ est strictement croissante sur $[k,k+1[$, G_C est strictement décroissante sur chaque intervalle $[k,k+1[$, et par continuité en $k+1$, G_C est strictement décroissante sur chaque intervalle $[k,k+1]$. On en déduit que G_C est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ en mettant bout à bout ces intervalles, en ayant remarqué au préalable que par exemple $[k,k+1]$ et $[k+1,k+2]$ possèdent un point commun, et donc si $x\in[k,k+1]$, $y\in]k+1,k+2]$, on a :

$$f(x) \geq f(k+1) > f(y).$$

IV.4.3. Une fonction continue strictement décroissante définit un homéomorphisme de l'intervalle de départ sur l'intervalle d'arrivée. Il suffit donc de vérifier que :

$$G_C([-1,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} G_C(x), G_C(-1)] =]0,1].$$

C'est immédiat, car en particulier $G_Y(k)$ tend vers 0 si k tend vers plus l'infini.

IV.5.1. Par définition :

$$G_C(m+1/2) = G_Y(m)\left(\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}\right)^{1/2},$$

alors que $G_C(m) = G_Y(m)$ et $G_C(m+1) = G_Y(m+1)$. Ceci montrer les égalités demandées.

IV.5.2. Sachant que

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{G_C(m+1)}{G_C(m)}}$$

et en utilisant l'équivalent trouvé à la question **IV.3.3.**, nous voyons que α_m tend vers 0 si m tend vers plus l'infini.

IV.6.1. D'après la question **IV.4.3.**, il apparaît que $\lim_{x\to0} G_C^{-1}(x) = +\infty$, ce qui prouve en particulier que (a_n) converge vers $+\infty$. Il en est de même de (I_n).

IV.6.2. On pose $m = I_n$. D'après la question **IV.5.1.**, $G_C(m+1) = \alpha_m G_C(m+1/2)$. Maintenant, $m + 1/2 \geq a_n$, et comme G_C est décroissante, alors $G_C(m+1/2) \leq G_C(a_n) = \frac{1}{n}$. Ceci prouve la première inégalité.
D'autre part, on a :

$$G_C(m-1) = \frac{G_C(m-1/2)}{\alpha_{m-1}}.$$

Mais $m \leq a_n + 1/2$ donc $m - 1/2 \leq a_n$ et $G_C(m-1/2) \geq \frac{1}{n}$.

IV.7. D'après **IV.2.2**,

$$P(M_n \leq I_n + 1) = (1 - G_C(I_n + 1))^n.$$

En utilisant le résultat de la question prédédente :

$$p_n \geq \left(1 - \frac{\alpha_{I_n}}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{\alpha_{I_n}}{n}\right)\right).$$

Mais α_{I_n}/n tend vers 0, et un développement limité donne :

$$\exp\left(n \log\left(1 - \frac{\alpha_{I_n}}{n}\right)\right) \sim \exp\left(-\alpha_{I_n}\right).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le résultat de la question **IV.5.2.** pour déduire que p_n tend vers 1.
Pour la suite q_n, on applique un raisonnement similaire :

$$q_n \leq \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{n\alpha_{(I_n-1)}}\right)\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{\alpha_{(I_n-1)}}\right)$$

(où on a utilisé que $1/n\alpha_{(I_n-1)}$ tend vers 0, ce qui est une conséquence de la question **IV.6.2.**). On en déduit donc que q_n tend vers 0 en plus l'infini.

IV.8. L'événement $(M_n \leq I_n + 1)$ est la réunion disjointe des 3 événements $(M_n = I_n + 1)$, $(M_n = I_n)$, et $(M_n \leq I_n - 1)$. On en déduit que :

$$p_n = q_n + (P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n + 1)).$$

Faire tendre n vers plus l'infini donne le résultat.

IV.9.1. Le tableau donne immédiatement que a_{10^5} est compris entre 4 et 5. Néanmoins, il faut un calcul plus précis pour déterminer si I_{10^5} vaut 4 ou 5. On pose $a_{10^5} = 4 + x$. Le calcul de G_C donne :

$$10^{-5} = G_C(4+x) = G_Y(4)\left(\frac{G_Y(4)}{G_Y(5)}\right)^x.$$

La résolution de cette équation montre que $x = 0{,}66\ldots$, ce qui donne $I_{10^5} = 5$.

IV.9.2. Comme nous l'avons fait à la question **IV.8.**, nous écrivons :

$$\begin{aligned} P(M_{10^5} = I_{10^5}) + P(M_{10^5} = I_{10^5} + 1) &= P(M_{10^5} \leq I_{10^5} + 1) - P(M_{10^5} - 1 \leq I_{10^5}) \\ &= (1 - G_C(6))^{10^5} - (1 - G_C(4))^{10^5} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $0{,}97514\ldots$.

IV.9.3. Pendant les 10^5 premiers intervalles de temps, il y plus de 97% de chances que le nombre maximal de messages passant par le réseau par intervalle est 5 ou 6. Cela nous donne une borne maximale, avec une erreur faible.

Partie V.

V.1.1. Se rédige comme la première partie de **IV.4.1.**

V.1.2. Pour x dans l'intervalle $]m,m+1[$, le calcul de H' donne :

$$H'(x)=\frac{1}{G_Y(m)}\ln\left(\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\right)\left(\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\right)^{x-m}.$$

Maintenant, $G_Y(m)\geq G_Y(m+1)$, et l'inf de la fonction précédente est atteint quand x tend vers m. On obtient donc :

$$h_m=\frac{1}{G_Y(m)}\ln\left(\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\right).$$

Maintenant, en utilisant **IV.3.3.**,

$$\frac{G_Y(m)}{G_Y(m+1)}\sim\frac{m+1}{\mu},$$

et comme $G_Y(m)$ tend vers 0 si m tend vers plus l'infini, on obtient :

$$\lim_{m\to+\infty}h_m=+\infty.$$

V.2.1. Soit k et m des entiers tels que $a_n\leq k\leq k+1\leq\cdots\leq m\leq a_{n+1}$. On décompose :

$$H(a_{n+1})-H(a_n)=H(a_{n+1})-H(m)+H(m)-H(m-1)+\cdots+H(k)-H(a_n).$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur chaque intervalle, on obtient :

$$H(a_{n+1})-H(a_n)\geq\inf_{j\in\{k-1,\dots,m\}}h_j|a_{n+1}-a_n.$$

Maintenant, comme (a_n) tend vers plus l'infini, le résultat de la question précédente permet d'écrire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{j\geq[a_n]-1}h_j=+\infty,$$

ce qui prouve le résultat demandé.

V.2.2. Remarquons que pour tout n, on a $H(a_n)=n$, ce qui prouve :

$$\frac{H(a_{n+1})-H(a_n)}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n},$$

et comme cette quantité tend vers plus l'infini, c'est que $(a_{n+1}-a_n)$ tend vers 0.

V.3. Il s'agit d'une variante d'un résultat classique, qui dit que si une suite (x_n) tend vers l'infini, avec $(x_{n+1}-x_n)$ tend vers 0, alors la suite $(x_n-[x_n])$ est dense vers $[0,1]$. La démonstration de ce résultat est basée sur un raisonnement de type "saut de puce", qui peut par exemple être utilisé pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Nous adaptons ce raisonnement ici.

Soit $x\in]-1/2,1/2[$, et $\varepsilon>0$, suffisamment petit pour que $x-\varepsilon>-1/2$ et $x+\varepsilon<1/2$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n\geq n_0$, alors $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$. Soit k un entier tel que $a_{n_0}+1/2<k$. On considère l'ensemble :

$$E=\{n\geq n_0;\ a_n+1/2<k+1/2+x\}.$$

Cet ensemble est non vide (il contient n_0) et est majoré car (a_n) tend vers plus l'infini. Il possède donc un plus grand élément n_1. Par définition,

$$a_{n_1}+1/2<k+1/2+x\leq k+1.$$

D'autre part, comme $a_{n_1+1}-a_n<\varepsilon$, et que $a_{n_1+1}+1/2>k+1/2+x$, on obtient :

$$a_{n_1}+1/2\geq k+1/2+x-\varepsilon\geq k.$$

Donc, $I_{n_1} = k$ et on trouve :

$$x - \varepsilon < a_{n_1} - I_{n_1} < x.$$

Ceci prouve que la suite $(a_n - I_n)$ est dense dans $]-1/2,1/2[$, ou encore que l'ensemble A est dense dans $]-1/2,1/2[$. Donc :

$$]-1/2,1/2[\subset \bar{A}.$$

On passe à l'adhérence :

$$[-1/2;1/2] \subset \bar{A},$$

car $\bar{A}$ est déjà fermé. Donc A est dense dans $[-1/2,1/2]$.

V.4.1. La condition posée par l'énoncé impose que :

$$I_m + \frac{1}{4} < a_m < I_m + \frac{1}{2}.$$

Par définition de G_C, et par sa décroissance :

$$\frac{1}{m} = G_C(a_m) < G_C\left(I_m + \frac{1}{4}\right) = G_C(I_m)\left(\frac{G_C(I_m+1)}{G_C(I_m)}\right)^{1/4}.$$

Maintenant, le résultat de la question **IV.5.1.** donne le résultat demandé.

V.4.2. D'après le résultat de la question **V.3.**, on peut trouver une sous-suite $(a_{\theta(n)})$ et $(I_{\theta(n)})$ tel que

$$I_{\theta(n)} - a_{\theta(n)} < -\frac{1}{4}.$$

Maintenant en utilisant un raisonnement semblable à la question **IV.7.** et le résultat de la question **V.4.1.**, on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{\theta(n)} \leq I_{\theta(n)}) = 0.$$

Le résultat de la question **IV.8.** permet de conclure.

V.4.3.

V.4.4. Le courageux lecteur qui sera arrivé jusque là saura sans problème adapter le résultat des questions **V.4.1.** et **V.4.2.** pour résoudre ces deux questions!