Concours commun Mines-Ponts 2001 PC - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : noyaux itérés, algèbre linéaire, séries entières, équations différentielles, polynômes, endomorphismes qui commutent

Commentaires : Dans ce problème plutôt facile, mais long, on est invité à résoudre par diverses méthodes une équation fonctionnelle liant des applications linéaires sur l'espace vectoriel des polynômes. Hormis une petite intervention (très classique!) des séries entières, on utilise essentiellement des techniques d'algèbre linéaire élémentaire. Beaucoup de questions auront déjà pu être traitées au cours de l'année de préparation. C'est donc un problème qui donne une prime au travail plus qu'à la virtuosité!

Préliminaires

a. Ces préliminaires sont classiquissimes! Pour cette question, on commence par remarquer que $\{0\} = ker\ Id = ker f^0 \subset ker f$. Ensuite, si $k \geq 1$, et $x \in ker f^k$, alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, et donc $x \in ker f^{k+1}$.

b. Il suffit de montrer l'inclusion $ker f^{q+1} \subset ker f^q$. Soit donc x un élément de $ker f^{q+1}$. Alors $f^{p+1}(f^{q-p}(x)) = 0$, ce qui prouve que $f^{q-p}(x) \in ker f^{p+1}$. Par hypothèse, on en déduit que $f^{q-p}(x) \in ker f^p$. Ou encore que $f^q(x) = 0$, ie $x \in ker f^q$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout entier k supérieur ou égal à p, alors $ker f^k = ker f^p$.
Nous notons d_k la dimension de $ker f^k$. (d_k) est une suite croissante d'entiers, et dès que $d_k = d_{k+1}$, on a $d_l = d_k$ pour $l \geq k$. Comme $d_k \leq n$, il existe un plus petit entier p pour lequel $d_p = d_{p+1}$, et si $k < p$, $d_k < d_{k+1}$, soit encore $d_k \leq d_{k+1} - 1$ (les quantités qu'on traite sont des entiers). En particulier, une récurrence simple montre que si $k \leq p$, alors $d_k \geq k$. D'où $d_p \geq p$. Mais $d_p \leq n = dim V$, et donc $n \geq p$.

c. Si l'endomorphisme u est nilpotent, la suite des dimensions des noyaux est stationnaire égal à n à partir d'un rang p, dont on sait par la question précédente qu'il est inférieur ou égal à n. En particulier, $dim\ ker\ u^n = n$, et donc l'endomorphisme u^n est nul.

Première Partie

I.1.a. Nous remarquons que :

$$g \circ D_n = g \circ (g^2 - \lambda Id) = g^3 - \lambda g = g^2 \circ g - \lambda Id \circ g = (g^2 - \lambda Id) \circ g = D_n \circ g.$$

Donc g commute avec D_n et aussi avec toute puissance de D_n, en particulier avec D_n^{p+1}. Si $x \in E_p$, alors :

$$D_n^{p+1}(g(x)) = g(D_n^{p+1}(x)) = g(0) = 0,$$

et comme E_p est exactement le noyau de D_n^{p+1}, $g(x) \in E_p$. La dernière égalité à prouver consiste simplement à prendre les restrictions de tous les endomorphismes à E_p.

Remarque : Pour résoudre cette question, on a utilisé un cas particulier d'un fait très classique, et qu'il faut savoir démontrer : si u et v sont deux endomorphismes qui commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors $ker\ u$ et $Im\ u$ sont stables par v.

I.1.b. Les preuves sont exactement identiques, dès lors que l'on remarque que $E_n = ker D^{n+1}$.

I.1.c.i. Soit $(P_1, \dots, P_{n+1})$ une base de F. Soit k le degré maximal des polynômes $P_1, \dots, P_{n+1}$. Comme un élément de F s'obtient par combinaisons lineaires des polynômes $P_1, \dots, P_{n+1}$, son degré est inférieur ou égal à k. Donc, pour tout P de F, $D^{k+1}(P) = 0$. En particulier, l'endomorphisme de F D_F est nilpotent. D'après la question c. des préliminaires, $D_F^{n+1} = 0$. En particulier $F \subset E_n = ker\ D^{n+1}$. Comme les dimensions sont égales, on en déduit que $F = E_n$.

Les sous-espaces vectoriels G de E de dimension finie stables par D sont donc les E_n. Soit maintenant G un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie, stable par D. Nous allons prouver que $G = E$. Si tel n'est pas le cas, il existe un entier k pour lequel il n'existe pas de polynôme de degré k dans G. Maintenant, comme $dim\ G = +\infty$, il existe dans G un polynôme de degré $d > k$. Alors, $D^{d-k}(P)$ est élément de G, et est de degré k : c'est impossible.

I.1.c.ii. D'abord, si G est stable par D, ou bien $G = E$, et il n'y a pas de problèmes, ou bien $G = E_n$. Mais alors la question b. a prouvé que E_n est stable par g.

Réciproquement, si G est stable par g, il l'est par g^2, et bien entendu par Id_E. L'équation fonctionnelle prouve donc que G est stable par D.

I.2.a. E_0 est la droite réelle, et D_0 est l'application nulle. Comme les applications linéaires en dimension 1 sont toutes de la forme $g(x) = \mu x$, l'équation fonctionnelle a une solution si, et seulement si, $\lambda \geq 0$.

I.2.b. Ces deux propriétés se démontrent de la même manière. Par exemple, E_0 est stable par g, par Id_E, et par D. En notant g_0 la restriction de g à E_0, on obtient : $g_0^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0$. C'est impossible si $\lambda < 0$.

I.3.a. Nous choisissons y dans V tel que $f^n(y) \neq 0$. Si la famille $(y, \dots, f^n(y))$ est liée, alors on a une relation de liaison :

$$\lambda_0 y + \dots + \lambda_n f^n(y) = 0,$$

où les λ_i ne sont pas tous nuls. Soit p le plus petit indice pour lequel $\lambda_p \neq 0$. On applique f^{n-p} à la relation de liaison pour obtenir :

$$\lambda_p f^n(y) = 0.$$

Ceci est impossible puisque ni λ_p, ni $f^n(y)$ ne sont nuls. Dans cette base B, il est alors clair que la matrice de f est A_0.

I.3.b. Il s'agit d'une application immédiate de la question précédente. Il est à remarquer que nous sommes dans un cas particulièrement facile, puisqu'on peut exhiber une telle base B_n : il suffit de prendre $B_n = (n!, n \times \dots \times 2X, \dots, X^n)$. La matrice de $\lambda Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n est alors A_λ.

I.4.a. D'abord, il est clair que de tels endomorphismes commutent avec D_2, puisque ce sont des polynômes en D_2. Réciproquement, si h commute avec D_2, on définit a,b et c par :

$$h(X^2) = aX^2 + 2bX + 2c.$$

(c'est le seul choix possible pour a, b et c de sorte que l'égalité souhaitée soit vérifiée au moins pour le vecteur X^2) Il suffit de prouver que h et $aId_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$ coïncident sur $(1,X,X^2)$. Par définition, c'est le cas sur X^2. D'autre part :

$$h(X) = h \circ D_2(X^2/2) = \frac{1}{2} D_2 \circ h(X^2) = \frac{1}{2} D_2(aX^2 + 2bX + 2c) = aX + b,$$

$$h(1) = h \circ D_2^2(X^2/2) = \frac{1}{2} D_2^2 \circ h(X^2) = \frac{1}{2} D_2^2(aX^2 + 2bX + 2c) = a.$$

C'est exactement le résultat souhaité.

I.4.b. Nous cherchons un tel endomorphisme g. Nécessairement, g commute avec D_2, donc $g = aId_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$. Nous calculons g^2 et trouvons :

$$g^2 = a^2 Id_{E_2} + 2abD_2 + (b^2 + 2ac)D_2^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2.$$

Comme (Id_{E_2}, D_2, D_2^2) est une famille libre de $L(E)$, une condition nécessaire et suffisante est que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & \lambda \\ 2ba & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous supposerons que $\lambda > 0$, ce qui n'est pas fait dans l'énoncé, mais on sait bien que le cas $\lambda < 0$ est trivial, et le cas $\lambda = 0$ sera étudié dans la deuxième partie. Le système précédent se résoud alors en :

$$a = \pm\lambda,\ b = \frac{1}{2a},\ c = -\frac{b^2}{2a}.$$

L'équation $G^2 = A_1$ correspond au cas où $\lambda = 1$, en interprétant toutes les applications linéaires à travers la base B_2. On trouve deux telle matrices :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & +1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième Partie

II.1.a. Comme $g^2 = D_n$ et que $D_n^{n+1} = 0$, on sait que $g^{2(n+1)} = 0$, et donc g est nilpotent. Maintenant, comme $n > 1$, si $dim\ ker\ g^2 \leq 1$, les préliminaires prouvent que ou bien $ker\ g = \{0\}$, et alors g est injective et donc non nilpotente, ou bien $ker\ g = ker\ g^2 = ker\ g^k$, et donc g ne peut être nilpotent.

II.1.b. Si un tel g existe, on a nécessairement $ker\ g^2 = ker\ D_n$, mais le premier noyau est de dimension supérieure ou égale à 2, tandis que le premier est de dimension 1. C'est impossible!

II.1.c. Si un tel g existe, alors par restriction il existerait aussi pour E_2 par exemple, ce qui n'est pas le cas.

II.2.a. D est (évidemment) surjectif, il suffit d'intégrer pour obtenir une opération inverse! Comme composée de surjections, D^m est surjectif. Donc g^k aussi. Comme $Im\ g^k \subset Im\ g$, g est aussi surjectif.

II.2.b. On a $dim\ ker\ g^q \leq dim\ ker\ g^k = dim\ ker\ D^m = m$.

II.2.c. Si $P \in\ ker\ g^p$, $g^{p-1}(\phi(P)) = g^p(P) = 0$, et donc ϕ est bien à valeurs dans $ker\ g^{p-1}$. D'autre part, $ker\ \phi = ker\ g \cap ker\ g^p = ker\ g$ (cf préliminaires). Démontrons maintenant que ϕ est surjective. Si $Q \in ker\ g^{p-1}$, comme g est surjective, il existe P de E tel que $Q = g(P)$. Maintenant, $g^p(P) = g^{p-1}(Q) = 0$, ce qui prouve que $P \in ker\ g^p$, et $Q = \phi(P)$.
Finalement, on applique le théorème du rang :

$$dim\ ker\ g^p = dim\ ker\ g + dim\ ker\ g^{p-1},$$

ce qui donne $dim\ ker\ g^p = pdim\ ker\ g$, par une récurrence immédiate.

II.2.d. Nécessairement, $dim\ ker\ g^k = dim\ ker\ D^m$, ce qui se retraduit en $k.dim\ ker\ g = m$, et qui impose $k|m$. On retrouve ainsi II.1.c., puisque 2 ne divise pas 1.
Réciproquement, si $k|m$, on écrit $m = kl$, et on pose $g = D^l$. Alors $g^k = D^m$.

Troisième Partie

III.1.a. Fixons t, et posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & & a_n \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 \\ 0 & \dots & & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Effectuons le produit $(I_{n+1} + tD_n)A$. Nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 t + a_1 & \dots & & a_{n-1}t + a_n \\ 0 & a_0 & a_0 t + a_1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & a_0 & a_0 t + a_1 \\ 0 & \dots & & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Nous souhaitons inverser la matrice $I_{n+1} + tD_n$, et nous choisissons donc $a_0 = 1$, $a_1 = -t$, $a_2 = t^2, \dots, a_k = (-1)^k t^k$. $I_{n+1} + tD_n$ est donc inversible, d'inverse $A = \sum_{k=0}^n a_k(t) D_n^k$.

II.1.b. L'application $t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est polynômiale, donc dérivable. Sa dérivée est : $\varphi(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^k k t^{k-1} (D_n)^k$. Il reste à exprimer cette dérivée en fonction de $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ et D_n. Nous intuitons le résultat par analogie avec le cas classique : si $f(x) = 1 + ax$, alors $f'(x) = \frac{-a}{(1+ax)^2}$.

Nous calculons alors $-D_n.\left[(I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right]^2$. Et le calcul donne... $\varphi(t)$.

III.1.c. Nous pouvons factoriser par D_n dans $L_n(t)$:

$$\begin{aligned} L_n(t) &= D_n \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} D_n^{k-1} \right) \\ &= D_n \circ M_n(t), \end{aligned}$$

où D_n et $M_n(t)$ commutent. En particulier : $L_n^{n+1}(t) = D_n^{n+1} \circ M_n^{n+1}(t) = 0$.

III.1.d. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_n(t)) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} (D_n)^k \\ &= D_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} (D_n)^{k-1} \\ &= D_n.(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \end{aligned}$$

(n'oublions pas que $D_n^{n+1} = 0$). Ensuite, si $k \geq n+1$, la dérivée de $L_n(t)^k$ est nulle puisque la fonction elle-même est nulle. Pour $k \leq n+1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_n(t))^k &= k.\frac{d}{dt}(L_n(t)).L_n(t)^{k-1} \\ &= kD_n(I_{n+1} + tD_n)^{-1} L_n(t)^{k-1} \end{aligned}$$

(la première égalité étant justifiée par le fait que $L_n(t)$ est un polynôme en D_n, et il n'y a pas de problèmes de commutation).

III.2.a.Il s'agit d'une simple variante de la démonstration du résultat $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$, qui ne pose pas de problèmes car tout commute. En effet :

$$\begin{aligned}
\varphi_u(t).\varphi_v(t) &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j+l=k} \frac{u^l}{l!}\frac{v^j}{j!}(L_n(t))^l (L_n(t))^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(L_n(t))^k}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(l-k)!} u^l v^{k-l} \\
&= \varphi_{u+v}(t).
\end{aligned}$$

III.2.b. φ_u est un polynôme, et est donc dérivable. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
\varphi_u'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k!} k D_n (I_{n+1} + tD_n)^{-1} L_n(t)^{k-1} \\
&= uD_n(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} (L_n(t))^{k-1} \\
&= u(I_{n+1} + tD_n)^{-1}.D_n.\varphi_u(t)
\end{aligned}$$

III.2.c. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi_1''(t) &= -D_n\left[(I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right]^2.D_n.\varphi_u(t) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1}.D_n.(I_n + tD_n)^{-1}.D_n.\varphi_u(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On sait donc que $\varphi_1(t) = A + tB$. Mais $\varphi_1(0) = I_{n+1}$ et $\varphi_1'(0) = D_n$, ce qui donne le résultat.

III.3.a. Soit $M = \sqrt{\lambda}\varphi_{1/2}(1/\lambda)$. Alors la question précédente nous permet d'affirmer que :

$$M^2 = \lambda\varphi_1(1/\lambda) = \lambda\varphi_1(1/\lambda) = \lambda I_{n+1} + D_n.$$

Un tel endomorphisme g existe donc.

III.3.b. Il suffit de calculer $\varphi_{1/2}(1)$. C'est une bonne occasion d'utiliser un logiciel de calcul formel! Voici un exemple de listing sous Maple!

```
>D2:=array(1..3,1..3,[ [0,1,0],[0,0,1],[0,0,0]]);
>L2:=D2-D2^2/2;
>P:=sum('(1/2)^k/(k!)*L2^k','k=0..2');
>evalm(P);
```

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quatrième Partie

IV.1.a. Pour cette question IV.1., il s'agit pour l'essentiel de montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est développable en série entière, et de calculer ce développement. C'est du cours, et il faut savoir faire cela à la fois vite et bien! Soit donc $h(x) = \sqrt{1+x}$. h est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, et sa dérivée vérifie $h'(x) = \dfrac{1}{2h(x)}$. La fonction h vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$2(1+x)h' - h = 0.$$

IV.1.b. Nous faisons un raisonnement par analyse/synthèse afin de montrer que h est somme d'une série entière. Nous supposons qu'il existe une série entière $S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$ solution de l'équation différentielle précédente, sur un intervalle $]-a,a[$ non vide, et vérifiant en outre $S(0) = 1$. Nous introduisons S dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} 2(1+x)S' - S &= 2(1+x)\sum_{p=0}^{+\infty} p b_p x^{p-1} - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \\ &= 2\sum_{p=0}^{+\infty} p b_p x^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} (2p-1) b_p x^p \\ &= 2\sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) b_{p+1} x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} (2p-1) b_p x^p = 0 \end{aligned}$$

Les coefficients d'une série entière nulle sur un intervalle non vide sont nécessairement tous nuls, et donc on a l'équation de récurrence suivante :

$$b_{p+1} = -\frac{(2p-1)}{2(p+1)} b_p.$$

Nous pouvons alors facilement calculer les b_p, sachant que $b_0 = 1$:

$$\begin{aligned} b_p &= \frac{(-1)^p (2p-3)(2p-5)\dots 3.1.(-1)}{2^p p(p-1)\dots 1} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}(2p-2)(2p-3)(2p-4)\dots 2.1}{2^p.p!.(2p-2)(2p-4)\dots 2} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}(2p-2)!}{2^{2p-1} p!(p-1)!} \end{aligned}$$

Passons à la synthèse : nous considérons $S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x$, où les b_p sont exprimés ci-dessus. Nous remarquons que $\left|\frac{b_{p+1}}{b_p}\right|$ tend vers 1, et le critère de D'Alembert prouve que la série entière S est de rayon de convergence 1. En outre, les calculs effectués précédemment prouvent que S est solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$, avec $S(0) = 1$. Comme le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'il existe une unique telle solution, et que h en est une autre, c'est donc que $S = h$ sur $]-1,1[$.

IV.1.c. Les c_n correspondent aux coefficients de la série entière carré de la série entière correspondant à $\sqrt{1+x}$. Comme $h^2(x) = 1 + x$, on obtient $c_0 = c_1 = 1$, tandis que $c_n = 0$ dès que $n \geq 2$.

IV.2.a. En fait, pour tout polynôme P, la somme précédente est finie. Cette remarque assure d'une part la convergence de la série, et donc que T est bien définie, et d'autre part que $T(P)$ est un polynôme, et enfin que T est linéaire.

IV.2.b. Nous avons $T^2(P) = \sum_{p=0}^{+\infty} d_p D^p P$ (la somme est en fait finie), où :

$$d_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{b_k}{\lambda^k} \frac{b_{p-k}}{\lambda^{p-k}} = \frac{c_p}{\lambda^p}.$$

Donc, d'après la question précédente, $T^2(P) = P + \frac{1}{\lambda} DP$ (la somme était effectivement finie!).

IV.2.c. Il suffit de poser $g = \sqrt{\lambda} T(P)$, et comme dans la partie III., on vérifie facilement que $g \circ g = \lambda Id_E + D$.

IV.2.d. Il suffit dans ce cas de prendre les restrictions, c'est-à-dire de considérer par exemple $T_n(P) = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p P$. On retrouve par un calcul facile le cas des matrices obtenues à la question I-4.