Trigonométrie

- Corrigés -

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur http://www.bibmath.net

I. Le "Carré géométrique" de Fibonacci

ABCD est un carré, ses 4 côtés ont donc la même longueur et il possède 4 angles droits. En particulier ,les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{DCB}$. Les triangles DAE et DCS sont donc respectivement rectangles en A et C.

AE=1,25 cm = 0,0125 m

Dans le triangle DAE, rectangle en A :

$$\tan \widehat{ADE} = \frac{AE}{DA} \text{ ; } d'où \tan \widehat{ADE} = \frac{0.0125}{1} = 0.0125$$

On en déduit une valeur approchée de l'angle : 0.716159945°...

Obtenu avec la touche $\tan^{-1}$ (ou atan) selon les marques de calculatrice.

Les côtés (AD) et (BC) du carré étant parallèles, les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DSC}$ en position d'angles alterne-internes sont donc égaux.

Par conséquent les tangentes de ces 2 angles aigus sont donc aussi égales et $\tan \widehat{DSC} = 0.0125$

Dans le triangle DSC rectangle en C :

$$\tan \widehat{DSC} = \frac{DC}{SC} \text{ ; } d'où\ 0.0125 = \frac{1}{SC}$$

On en déduit :

$SC = \dfrac{1}{0.0125} = 80$ La distance SC est donc de 80 m

II. La fenêtre de toit

(AC) étant parallèle au sol et (AB) parallèle à la pente du toit, il en résulte que $\hat{p}$ et $\widehat{BAC}$ sont des angles à côtés parallèles, donc égaux.

(*Si on ne connaît pas ce théorème, rien n'empêche de tracer la demi-droite [Ex parallèle à la pente du toit – donc aussi à (AB) – et on obtient un angle correspondant avec* $\hat{p}$ *et* $\widehat{BAC}$ *, d'où l'égalité de* $\hat{p}$ *et* $\widehat{BAC}$)

Pour la même raison, les rayons lumineux étant parallèles, $\hat{h}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.

(AH) ayant été tracée perpendiculaire aux rayons lumineux, l'angle $\widehat{AHC}$ est droit et les triangles AHB et AHC, rectangles en H.

On a donc :

$\widehat{HCA} = 35^\circ$ et $\widehat{BAC} = 40^\circ$

Dans le triangle ABC, on en déduit que $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{HCA} + \widehat{BAC}) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

Les angles $\widehat{HBA}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires ($\widehat{HBC}$ est un angle plat)

D'où $\widehat{HBA} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

On peut constater que le calcul de $\widehat{ABC}$ n'était pas nécessaire :

$\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{HCA} + \widehat{BAC})$ et $\widehat{HBA} = 180^\circ - \widehat{ABC}$

Donc :

$$\widehat{HBA} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - (180^\circ - (\widehat{HCA} + \widehat{BAC})) = \widehat{HCA} + \widehat{BAC} = 75^\circ$$

Dans le triangle HAB rectangle en H :

$\sin \widehat{HBA} = \dfrac{AH}{AB}$ soit $\sin 75^\circ = \dfrac{AH}{1,2}$ et on en déduit que $AH = 1,2 \times \sin 75^\circ \approx 1,15911$ m

Connaissant AH, on va calculer AC dans le triangle AHC rectangle en C :

$\sin \widehat{HCA} = \dfrac{AH}{AC}$ soit $\sin 35^\circ = \dfrac{1,15911}{AC}$ et on en déduit que $AC = \dfrac{1,15911}{\sin 35^\circ} \approx 2,02$ m...

III. Le tunnel

Problème similaire au précédent.

On a besoin de $\widehat{POS} = 35^\circ + 26^\circ = 61^\circ$

La longueur ES du tunnel se calcule par différence : ES = PS - PE

Dans le triangle POE rectangle en P :

$\tan \widehat{POE} = \dfrac{PE}{PO}$ soit $\tan 35^\circ = \dfrac{PE}{300}$ et on en déduit que $PE = 300 \times \tan 35^\circ \approx 210{,}06226...$ m

Dans le triangle POS rectangle en P :

$\tan \widehat{POS} = \dfrac{PS}{PO}$ soit $\tan 61^\circ = \dfrac{PS}{300}$ et on en déduit que $PS = 300 \times \tan 61^\circ \approx 541{,}21432...$ m

D'où ES = PS – PE = 541,21432-210,06226 = 331,15206 soit **331,15 m**

IV. Les arbres

Si le point H était en dehors de [AB] cela signifierait que soit le point A est sur [HB], soit le point B est sur [HA]...

Ce qui entraînerait que soit l'angle $\hat{A}$, soit l'angle $\hat{B}$ sont obtus. Or $\hat{B} = 70^\circ$, il est donc aigu et $\hat{A} = 180^\circ - (70^\circ + 51^\circ) = 59^\circ$ est aussi aigu.

H est donc bien entre A et B, d'où AB = AH + HB.

Dans le triangle OHB rectangle en H :

$\cos \widehat{OBH} = \dfrac{BH}{OB}$ soit $\cos 70^\circ = \dfrac{BH}{200}$ et on en déduit que $BH = 200 \times \cos 70^\circ \approx 68{,}404 ... m$

Concernant AH, dans le triangle rectangle OHA rectangle en H, on sait juste que $\hat{A} = 59^\circ$: il est nécessaire de connaître, soit OA, soit OH.

Le calcul de OH se fait en une fois, dans le triangle OHA :

$\sin \widehat{OBH} = \dfrac{OH}{OB}$ soit $\sin 70^\circ = \dfrac{OH}{200}$ et on en déduit que $OH = 200 \times \sin 70^\circ \approx 187{,}9385 ... m$

Pourquoi ne pas avoir utilisé la tangente de $\widehat{OBH}$?

Parce qu'elle utilise BH qui est une valeur approchée alors que 200 est une valeur exacte.

D'où

dans le triangle OHA rectangle en H :

$\tan \hat{A} = \dfrac{OH}{OA}$ soit $\tan 59^\circ = \dfrac{187{,}9385}{AH}$ et on en déduit que $AH = \dfrac{187{,}9385}{\tan 59^\circ} \approx 112{,}9248\, m$

et

AB = AH + BH =112,9248+68,404 =181,3288

La distance entre les deux arbres à 1 dm près est donc **181,3 m**

V. Arc en plein cintre outrepassé

La hauteur h est la somme de OH et du rayon de l'arc.

En traçant [OA], il est plus facile de se rendre compte (et de le justifier) que le point H est le milieu de [AB].

En effet OA = OB = rayon.

Deux méthodes :

* Le triangle AOB qui a 2 côtes, [OA] et [OB], de même longueur est isocèle de sommet principal O.
  [OH] est donc la hauteur issue de O dans ce triangle isocèle.
  Or, dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est également médiane, médiatrice de cette base et bissectrice de l'angle au sommet.
  Donc H est le milieu de [AB]
* Puisque OA = OB, alors le point O est équidistant des extrémités du segment [AB].
  Le point O apparient donc à la médiatrice de [AB].
  Cette médiatrice passe donc par O et est perpendiculaire à [AB]. Or (OH) est perpendiculaire à [AB], donc (OH) est la médiatrice de [AB]. Donc H est le milieu de [AB].

D'où BH = 1 m

(OC) et (AB) étant parallèles, les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OBH}$ en position d'angles alterne-internes sont donc égaux.

Donc $\widehat{OBH} = 25^\circ$

Travaillons maintenant dans le triangle OBH rectangle en H

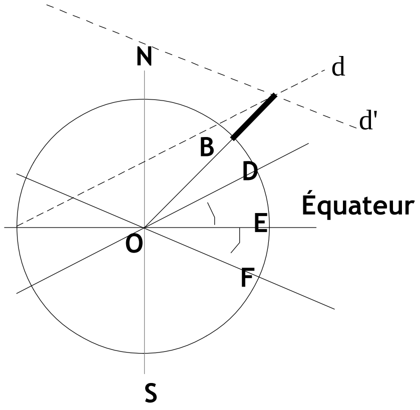
$\tan \widehat{OBH} = \dfrac{OH}{BH}$ soit $\tan 25^\circ = \dfrac{OH}{1}$ et on en déduit que $OH = \tan 25^\circ \approx 0{,}4663\, m$

et

$\cos \widehat{OBH} = \dfrac{BH}{OB}$ soit $\cos 25^\circ = \dfrac{1}{OB}$ et on en déduit que $OB = \dfrac{1}{\cos 25^\circ} \approx 1{,}1034\, m$

D'où la hauteur de l'arc : h = 1,1034+0,44663 = 1,5497 soit **h = 1,550 m à 1 mm près**

VI. Directions du soleil aux solstices d'été et d'hiver



La latitude de Bordeaux est donnée par l'angle $\widehat{BOE}$.

Traçons le rayon lumineux d parallèle au rayon (OD).

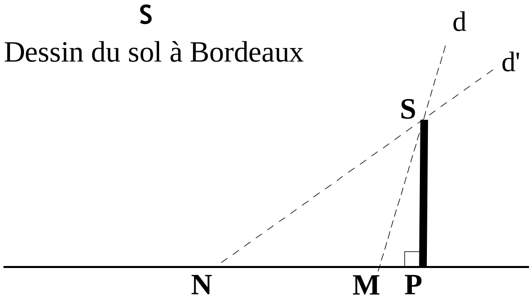
L'angle que fait (OD) avec l'équateur et l'angle que fait (OB) avec (OD) sont alterne-internes et comme d et (OB) sont parallèles, ces angles sont donc égaux.

Donc $\widehat{BOD} = 45^\circ - 23^\circ 05' = 21^\circ 55'$

De même, traçons le rayon lumineux d' parallèle au rayon (OF).

L'angle que fait (OF) avec (OB) et l'angle que fait (OB) avec d' sont alterne-internes et comme d' et (OF) sont parallèles, ces angles sont donc égaux.

Dessin du sol à Bordeaux



La perpendiculaire au sol en tout point de la Terre passe par le centre de la Terre.

On a $\widehat{MSP} = 21^\circ 55'$

Mais cette mesure est inutilisable telle quelle, il faut la convertir en degrés décimaux : c'est le rôle de la touche ° ' " de la calculette...

À défaut, on peut calculer ainsi :

$21 + 55/60 = 21 + 11/12 \approx 21{,}96666...^\circ$

Dans le triangle MSP rectangle en P :

$\tan \widehat{MSP} = \dfrac{MP}{SP}$ soit $\tan(21.96666^\circ) = \dfrac{MP}{2}$ et on en déduit que $MP = 2 \times \tan(21{,}96666^\circ) = 0{,}80\, m$

$68^\circ 5' = 68^\circ + 5/60 = 68^\circ + 1/12 \approx 68{,}0833^\circ$

On a donc $NP = 2 \times \tan(68{,}0833^\circ) \approx 4{,}97\, m$

VII. Hauteur de la montagne

L'utilisation d'une petite équation s'impose.

Soit $AH = x$: il va falloir exprimer deux fois la hauteur SH en fonction de *x* en utilisant les deux triangles BSH et ASH rectangles en H.

Là, il n'est pas nécessaire de "traîner" les valeurs approchées des tangentes : on va plutôt garder les formes tan 20° et tan 25°...

1. Dans le triangle BSH, on exprime BH en fonction de *x* : BH = BA + *x* = 600+ *x*

   $\tan \widehat{SBH} = \dfrac{SH}{BH}$ soit $\tan 20^\circ = \dfrac{SH}{600 + x}$ et on en déduit que $SH = (600 + x) \tan 20^\circ$

2. Dans le triangle ASH :

   $\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH}$ soit $\tan 25^\circ = \dfrac{SH}{x}$ et on en déduit que $SH = x \tan 25^\circ$

3. On écrit alors que les 2 valeurs de SH sont égales et on obtient une équation à une inconnue *x*

   $x \tan 25^\circ = (600 + x) \tan 20^\circ$ on développe le 2e membre : $x \tan 25^\circ = 600 \tan 20^\circ + x \tan 20^\circ$

   On passe le $x \tan 20^\circ$ dans le 1er membre : $x \tan 25^\circ - x \tan 20^\circ = 600 \tan 20^\circ$

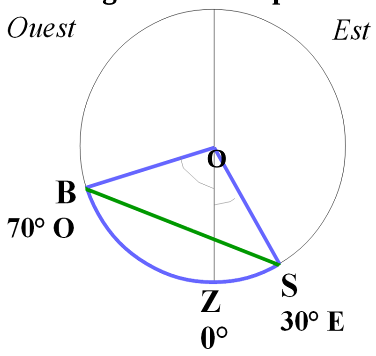
   Là, on pourrait utiliser les valeurs approchées de tan 25° et tan 20°, mais ce n'est même pas utile, on met x en facteur : $x(\tan 25^\circ - \tan 20^\circ) = 600 \tan 20^\circ$ d'où la valeur exacte $x = \dfrac{600 \tan 20^\circ}{\tan 25^\circ - \tan 20^\circ}$

4. On utilise donc l'écriture de SH obtenue dans le triangle ASH :

   $SH = \dfrac{600 \tan 20^\circ}{\tan 25^\circ - \tan 20^\circ} \times \tan 25^\circ \approx 997{,}07\, m$. La hauteur au mètre près de la montagne est 997 m.

VIII. Route orthodromique

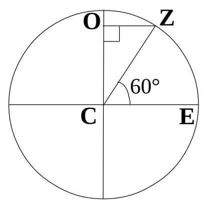
1. Longueur du 60e parallèle



Ci-contre, à gauche, le 60e parallèle en vue de dessus.

L'avion peut parcourir l'arc de 60e parallèle correspondant à l'angle $\widehat{BOS}$:

$$\widehat{BOS} = \widehat{BOZ} + \widehat{SOZ} = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$$



OZ est le rayon du 60e parallèle et il faut le calculer.
Le 60e parallèle est à 60° au-dessus de l'équateur, CZ est le rayon terrestre, soit 6370 km.
Les angles $\widehat{OCZ}$ et $\widehat{ECZ}$ sont complémentaires, donc :

$$\widehat{OCZ} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Par conséquent, dans le triangle COZ rectangle en O :

$$\sin \hat{C} = \frac{OZ}{CZ} \quad \text{d'où} \quad \sin 30^\circ = \frac{OZ}{6370} \quad \text{et} \quad OZ = 6370 \times \sin 30 \approx 3185$$

Le rayon du 60e parallèle mesure 3185 km.
Calcul de la longueur de l'arc de cercle BZ.
Le périmètre du cercle correspond à un angle de 360° en mesure 2π x 3185 ≈ **20011,945 km**.

2. Distance séparant les deux villes sur le 60e parallèle.

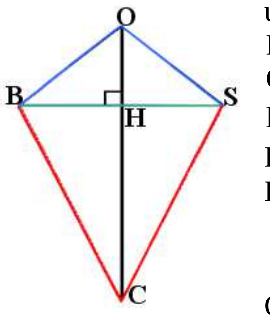
Petit tableau de proportionnalité :

Angle (en °)	360	100
Longueur (en km)	22011,945	?

La longueur de l'arc BS arrondi au cm près est **5558,874 km**...

3. Longueur de la route orthodromique

Mais le "grand cercle" de centre C (centre de la Terre) qui passe par B et S intercepte aussi un arc BS dont la longueur est différente puisque le rayon de ce grand cercle CB (ou CS) mesure 67370 km...
Ces deux cercles ont en commun la corde [BC] dont on a appelé H le milieu.
C'est la longueur BC de cette corde, qui va permettre de calculer l'angle au centre $\widehat{BCS}$ qui intercepte l'arc BS du "grand cercle" . Comment ?
Pour le comprendre, il faut se reporter au schéma ci-dessous où les deux triangles BOS et BCS ont été placés dans un même plan.



Le triangle BOS qui a 2 côtés de même longueur (2 rayons) est isocèle de sommet principal O. Dans ce triangle BOS, (OH) perpendiculaire au milieu de [BS] est aussi la bissectrice de l'angle au sommet $\widehat{BOS}$ (théorème de 4e).
D'où $\widehat{BOH} = \widehat{BOS}/2 = 50^\circ$
Dans le triangle BOH rectangle en H :

$$\sin \widehat{BOH} = \frac{BH}{OB} \quad \text{d'où} \quad \sin 50^\circ = \frac{BH}{3185} \quad \text{et} \quad BH = 3185 \times \sin 50 \approx 2439{,}852 \quad \text{km}$$

On montrerait de même que [CH) est la bissectrice de $\widehat{BCS}$

Calcul de l'angle $\widehat{BCH}$ (que l'on devra donc doubler).
Dans le triangle BCH rectangle en H :

$$\sin \widehat{BCH} = \frac{BH}{CB} \quad \text{d'où} \quad \sin \widehat{BCH} = \frac{3185 \sin 50^\circ}{6730} = \frac{1}{2} \sin 50^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{BCH} \approx 22{,}521^\circ \quad \text{d'où} \quad \widehat{BCS} \approx 45{,}042^\circ$$

Le périmètre du "grand cercle est : 2π x 3185 ≈ 40023,890 km.
Autre petit tableau de proportionnalité :

Angle (en °)	360	45,042
Longueur (en km)	40023,890	?

La longueur de l'arc BS arrondi au cm près est **5007.656 km**...

L'écart entre les deux "routes" est 5558,874 – 5007.656 = 551,218.
Il y a donc 551 km de moins pour aller de Bellin à Saint Petersbourg en suivant la route orthodromique plutôt que l'arc de 60e parallèle.

4. Cet écart justifie-t-il qu'un avion suive la route orthodromique plutôt que l'autre ?

Le kérosène est ce qui coûte le plus cher dans un avion après les frais de personnel...
Imaginons un service régulier d'autocars. Si sur chaque aller-et-retour on gagne 55*2 (pour rester dans un ordre de grandeur comparable, soit 110 km à 35L/100 km, il y a économie de 38,5 L. à 0,6 € par L soit 23 €...
Pour un autocar, ce n'est pas considérable, mais pour une flotte de 10 avec 20 voyages chacun par an, on arrive à 23*200 soit 4600 € par an ce qui est représente grosso modo 3 mois de salaire au SMIC, ce qui est loin d'être négligeable.