3. les questions 3 et 4 ont été le plus souvent bien traitées ;
4. la minoration de la question 5 a posé quelques difficultés ;
5. dans la question 8, on attendait une construction d'un chemin allant de z_1 à z_3 en passant par z_2, pour obtenir l'inégalité triangulaire, et la description d'un chemin de z_2 vers z_1, à partir d'un chemin de z_1 vers z_2 pour la symétrie ;
6. les inégalités de la question 11 ont posé un problème, en particulier la première à cause du signe de $\mathrm{Re}(z)cd$.

Pour la partie B,

1. les questions 15, 16, 17 de la partie B ont été en général bien traitées ;
2. la question 18 était plus délicate, en effet la relation d'adjacence n'étant pas transitive, un élément de longueur minimal parmi les adjacents d'un élément x, pouvait ne pas être réduit ;
3. le reste des questions de la partie B a été traité avec plus ou moins de succès par 4 copies.

Pour la partie C, les quatres premières questions ont été abordées avec succès, en partie par grapillage.

3.1.3 Commentaires sur le problème d'analyse et probabilités

Le problème d'analyse portait sur l'espace de Hardy dans le demi-plan complexe. Le but de la partie A était d'établir une formule de représentation pour les fonctions de l'espace de Hardy. Dans la question 2, on se donnait une fonction définie par la formule (1), et on vérifiait qu'elle appartenait à l'espace de Hardy. Dans la question 3, on montrait que, réciproquement, toute fonction de l'espace de Hardy pouvait être représentée par une telle formule. Cette partie faisait appel à des manipulations sur les intégrales à paramètres, à des connaissances sur la transformée de Fourier (identité de Plancherel) et sur les fonctions holomorphes (définition, formule de Cauchy, théorème intégral de Cauchy). La question 1 a été plutôt bien traitée. Dans la question 2, les moyennes aux sous-questions se situent entre 0,67/4 et 1,95/4. Moins de 10 candidats sur 41 ont abordé les questions 3.c à 3.h. Le but de la partie B était d'étudier les comportements des fonctions de l'espace de Hardy près de la frontière $\{y = 0\}$, en établissant une autre formule de représentation (4). Cette partie faisait principalement appel à des théorèmes d'intégration (Fubini, théorèmes de convergence). Elle a été traitée par 16 candidats sur 41 ; la médiane est à 4,5/22, et le quartile supérieur est à 12,5/22. Dans la partie C, on introduisait la transformée de Hardy. Il s'agissait principalement ici de manipuler la transformée de Fourier et d'utiliser les résultats des parties précédentes. Cette partie a été assez peu abordée (10 candidats ont traité au moins une question de cette partie). La partie D étudiait les liens entre transformée de Hardy et mutliplicateurs de Fourier. Cette partie a été plutôt bien traitée.

Il ressort des corrections que :

— de nombreux candidats semblent méconnaître les inégalités remarquables, et majorent par exemple $(a+b)^2$ par a^2+b^2, quitte à se contredire quelques lignes plus loin...
— les relations d'inclusion entre les espaces L^p sur un intervalle borné sont souvent mal maîtrisées. Il ne faut pas hésiter à tester ses assertions sur des exemples en cas de doute (par exemple la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ sur $]0,1[$ avec $\alpha > 0$) ;
— la transformée de Fourier est connue raisonnablement ;
— il manque souvent des réflexes basiques sur la manipulation des fonctions holomorphes (intégration sur un rectangle que l'on fait « tendre vers l'infini »).

3.2 Corrigé détaillé des exercices

Exercice 1

1. L'espace vectoriel E admet une structure de $\mathbf{R}$ algèbre, d'où la bilinéarité de l'application θ de $E \times E$ dans E qui associe au couple (M, N) le produit MN. On en déduit la linéarité des applications ϕ_A et ψ_A. Ces applications sont des endomorphismes de E.

2. L'associativité du produit matriciel permet d'écrire pour tout entier naturel n, $\phi_A^n = \phi_{A^n}$ et $\psi_A^n = \psi_{A^n}$. La bilinéarité de l'application θ permet alors d'obtenir $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$ et $P(\psi_A) = \psi_{P(A)}$.
3. D'après ce qui précède, si π_A est le polynôme minimal de A, $\pi_A(\phi_A) = \phi_{\pi_A(A)}$ donc $\pi_A(\phi_A) = 0_{L(E)}$. Le polynôme minimal π_{ϕ_A} de ϕ_A divise donc π_A. De plus si Id désigne la matrice identité de taille n, $\phi_{\pi_{\phi_A}(A)}(Id) = 0$ puis $\pi_{\phi(A)}(A) = 0$. Le polynôme π_A divise donc π_{ϕ_A}. Les polynômes minimaux de A et ϕ_A sont associés et unitaires, donc égaux. Un raisonnement du même type montre que $\pi_A = \pi_{\psi_A}$.
4. On sait que A et B sont diagonalisables si et seulement si leurs polynômes minimaux sont scindés à racines simples. Donc si A et B sont diagonalisables, ϕ_A et ψ_B, ayant même polynôme mimal, le sont. De plus par associativité du produit matriciel, pour tout M dans E, $A(MB) = (AM)B$, donc les endomorphismes ϕ_A et ψ_B commutent et sont simultanément diagonalisables. Une base diagonalisant $\phi_A$et ψ_B diagonalise aussi $\phi_A - \psi_B$.

   On sait que si B est diagonalisable alors sa transposée aussi (même polynôme minimal). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $(u_1, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres pour A et $(v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres pour la transposée de la matrice B. Si X_i désigne la matrice colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique, et Y_j celle associée à v_j, alors par construction, il existe des réels λ_i et β_j tels que $AX_i = \alpha_i X_i$ et ${}^tBY_j = \beta_j Y_j$. Considérons les matrices $F_{i,j} = X_i {}^tY_j$. On obtient n^2 matrices appartenant à E, et vérifiant

$$\phi_A(F_{i,j}) = \alpha_i F_{i,j} \tag{3.1}$$
$$\psi_B(F_{i,j}) = \beta_j F_{i,j} \tag{3.2}$$
$$(\phi_A - \psi_B)(F_{i,j}) = (\alpha_i - \beta_j) F_{i,j}.$$

   On a donc une famille de n^2 vecteurs propres communs aux endomorphismes ϕ_A, ψ_B et $\phi_A - \psi_B$. Il reste à démontrer que cette famille est libre. Supposons que des scalaires $\lambda_{i,j}$ vérifie l'égalité

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} X_i {}^tY_j = 0_E$$

   Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, les formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ définie par les matrices ${}^tY_j$ sont indépendantes. On peut donc considérer la base antéduale $(w_1, \dots, w_n)$ dont les matrices de coordonnées Z_k, associées, vérifient ${}^tY_j Z_k = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Kronecker. Alors par multiplication à droite par Z_k on obtient

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} X_i = 0$$

   L'indépendance des X_i permet de conclure à la nullité des coefficients $\lambda_{i,k}$.

   La famille $F_{i,j}$ est libre de cardinal n^2, c'est une base de diagonalisation simultanée. De plus chaque matrice $F_{i,j}$ est non nulle, et ses colonnes sont proportionnelles à X_i donc chaque matrice $F_{i,j}$ est de rang 1.

Exercice 2

1. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, $x_0 \in I$. On prend $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, puis $\delta > 0$ module de continuité de f_{n_0} en x_0 pour ε. On obtient, pour $|x - x_0| \leqslant \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$.
2. Le choix $I = [0, 1]$, $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ et $f = \mathbf{1}_{\{1\}}$ convient.
3. Soit $x, y \in I$ quelconques avec $x \leqslant y$, et $n \in N$ quelconque. On a

$$|f_n(y) - f_n(x)| = \left| \int_x^y f_n'(z)\, dz \right| \leqslant \int_x^y g(z)\, dz.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ avec x et y fixés, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_x^y g(z)\, dz.$$

Par ailleurs, comme g est localement intégrable sur I, $\lim_{\delta\to 0} \int_{[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap I} g(z)dz = 0$ pour tout $x_0 \in I$ (théorème de convergence dominée). On en déduit que f est continue sur I.

Exercice 3

1. Puisque X_n suit une loi exponentielle de paramètre 1, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > a\right) &= \mathbb{P}\left(X_n > a \ln n\right) \\ &= \int_{a\ln n}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{n^a}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

2. Si $a > 1$, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > a\right) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $P(A_a) = 0$.
Si $0 < a \leqslant 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > 1\right) = +\infty.$$

Comme les évènements $\{\frac{X_n}{\ln n} > 1\}$ sont indépendants, d'après la loi du 0-1 de Borel, on obtient $P(A_a) = 1$.

3. Soit $a > 0$ quelconque. Définissons la variable aléatoire $\delta = \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln n} - a$. Alors

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} = \{\delta > 0\} \tag{3.4}$$

$$\subset \left\{\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \sup_{k\geqslant n} \frac{X_k}{\ln k} \geqslant a + \frac{\delta}{2}\right\} \tag{3.5}$$

$$\subset \left\{\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \exists k \geqslant n,\ \frac{X_k}{\ln k} \geqslant a + \frac{\delta}{4}\right\}.$$

Donc

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} \subset \bigcap_{n\geqslant 2} \bigcup_{k\geqslant n} \left\{\frac{X_k}{\ln k} > a\right\} = A_a.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A_a &\subset \bigcap_{n\geqslant 2} \bigcup_{k\geqslant n} \left\{\frac{X_k}{\ln k} \geqslant a\right\} \\ &\subset \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geqslant a\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Soit $a > 1$ quelconque. D'après l'inclusion ci-dessus, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leqslant a \quad \text{presque sûrement.}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbf{N}^*}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leqslant 1+\frac{1}{N}\right\}\right)=1,$$

et par conséquent,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leqslant 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

Par ailleurs, en choisissant $a=1$ dans les deux questions précédentes, on obtient également

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\geqslant 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

En conclusion,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}= 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 4

1. Soit D la droite passant par B et parallèle à (AC). Supposons D parallèle à Δ_A, alors par transitivité Δ_A est parallèle à (AC). Ces droites Δ_A et (AC) ayant un point commun A sont confondues. Alors $(AB)=(AC)$ et le triange est aplati. On obtient une contradiction. Les droites D et Δ_A sont donc concourantes en un point A_1.
2. On applique le théorème de Thalès pour les droites Δ_A et (CB) et les parallèles (AC) et $(BA_1)=D$. Cela donne
$$\frac{I_AB}{I_AC}=\frac{I_AA_1}{I_AA}=\frac{A_1B}{AC}$$
La droite Δ_A étant la bissectrice de $\widehat{BAC}$, le triangle (ABA_1) a deux angles égaux
$$\widehat{A_1AB}=\widehat{CAA_1}=\widehat{BA_1A}.$$
D'où $c=A_1B$ et l'égalité des quantités $\frac{I_AB}{I_AC}$, $\frac{A_1B}{AC}$ et $\frac{c}{b}$.
3. Puisque I_A appartient au segment BC, la relation métrique précedent se traduit par
$$b\vec{I_AB}+c\vec{I_AC}=\vec{O}$$
Les coordonnées barycentriques normalisées de I_A dans (A,B,C) sont donc $(0,\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c})$.
4. Soit I le point de coordonnées barycentriques $(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c})$. Par associativité du barycentre, I est barycentre de A et I_A affectés des coefficients $\frac{a}{a+b+c}$ et $\frac{b+c}{a+b+c}$. En particulier I se trouve sur la bissectrice Δ_A. Le même raisonnement sur les autres bissectrices intérieures conduit au fait que I est dans l'intersection de ces bissectrices. C'est le point de concours des bissectrices intérieures, ou encore le centre du cercle inscrit au triangle ABC

Exercice 5

1. L'orbite d'un élément h de G pour l'action de $\langle g\rangle$ est $\langle g\rangle h$. C'est un ensemble de cardinal l'ordre de g, noté $o(g)$. Il y a sous l'action de $\langle g\rangle$ sur G, $[G:\langle g\rangle]$ orbites.
La décomposition de $\phi(g)$ en produit de cycles de supports deux à deux disjoints est donc formée de $[G:\langle g\rangle]$ $o(g)$-cycles de la forme $(h\,gh\,\ldots\,g^{o(g)-1}h)$ dès que $o(g)>1$. La signature de $\phi(g)$ est donc
$$\epsilon(\phi(g))=(-1)^{(o(g)-1)[G:\langle g\rangle]}.$$

2. L'élément $\phi(g)$ n'est pas dans le groupe alterné si et seulement si $o(g)$ est pair et $[G : \langle g\rangle]$ impair. Si G est d'ordre impair, $\phi(G)$ est toujours contenu dans le groupe alterné.
   Si G est d'ordre $2^k m$ avec $k > 0$ et m impair, les éléments g vérifiant $\epsilon(\phi(g)) = -1$ engendrent un groupe d'ordre pair et d'indice impair, donc contenant un 2-Sylow. Ce 2-Sylow est alors cyclique (donc tous les 2-Sylow par conjugaison). Réciproquement si un 2-Sylow de G est cyclique, tout générateur g de ce 2-Sylow conduit à un élément $\phi(g)$ de signature impaire. On en conclut que $\phi(G)$ est contenu dans le groupe alterné de $\mathfrak{S}_G$ si et seulement si les 2-Sylow lorsqu'ils existent ne sont pas cycliques.
3. Si G admet un 2-Sylow cyclique, alors $\epsilon \circ \phi$ est un homomorphisme non trivial de G dans $\{\pm 1\}$, son noyau H est un sous-groupe normal d'indice 2, de G. Comme $|G| > 2$ H est un sous-groupe normal non trivial de G, et G n'est pas simple.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$. Soit des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}_+)^n & \to & \mathbf{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \end{array}$$

On note

$$C = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1 \right\}.$$

1. La fonction f est continue sur $(\mathbf{R}_+)^n$ comme produit de fonctions continues. Par ailleurs, l'ensemble C est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, donc C est fermé. De plus, C est clairement borné puisque pour tout $(x_1, \cdots x_n) \in C$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i^{-1}$ pour tout i. Donc C est un compact de $\mathbf{R}$, et f est bornée et atteint ses bornes sur C : il existe $a \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x\in C} f(x)$.
   Par ailleurs, $\sup_{x\in C} f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{n\alpha_1}, \cdots \frac{1}{n\alpha_n}\right) > 0$, et on observe que s'il existe $i \in \{1, \cdots n\}$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x) = 0$. Donc la borne supérieure est atteinte sur l'ensemble $(]0, +\infty[)^n$, qui est ouvert. Autrement dit,

$$\sup_{x\in C} f(x) = \sup \left\{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ / \ x \in (]0, +\infty[)^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - 1 = 0 \right\}.$$

   Les applications f et $g : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - 1$ sont toutes deux différentiables sur l'ouvert $(]0, +\infty[)^n$. De plus, pour tout $y \in \mathbf{R}$, dg_y est la forme linéaire

$$dg_y : x \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

   Comme $(\alpha_1, \cdots \alpha_n) \neq 0$, la forme différentielle dg_y est surjective pour tout $y \in \mathbf{R}^n$. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, pour tout $a \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x\in C} f(x)$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a),$$

   c'est-à-dire, pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$

$$\alpha_i \frac{f(a)}{a_i} = \lambda \alpha_i.$$

   On en déduit que

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{f(a)}{\lambda}.$$

Comme $a \in C$ et que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on obtient $a_1 = \cdots = a_n = 1$.

Donc f atteint sa borne supérieure en un unique point de C : le point $(1, \cdots, 1)$. En particulier, $\sup_{x \in C} f(x) = 1$.

2. Soit $x \in (\mathbf{R}_+)^n$ quelconque. On distingue deux cas :
   — Premier cas : $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
   Dans ce cas l'inégalité
   $$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$
   est trivialement vérifiée (et c'est même une égalité).
   — Deuxième cas : $(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.
   Dans ce cas, $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j > 0$, et on peut définir $\tilde{x} \in (\mathbf{R}_+)^n$ par
   $$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}.$$
   On observe que $\tilde{x} \in C$. D'après la question précédente,
   $$f(\tilde{x}) = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}} \leqslant 1. \tag{3.7}$$
   En utilisant l'égalité $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, on obtient l'inégalité désirée.
3. En utilisant les notations de la réponse précédente et la question 1, on a égalité si et seulement si ($x = 0$ ou $\tilde{x} = (1, \cdots, 1)$), c'est-à-dire si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

3.3 Corrigé détaillé du problème d'algèbre et géométrie

Partie A : $Sl_2(\mathbf{Z})$ et le demi-plan de Poincaré

1. On remarque que l'intersection de deux ensembles distincts de la forme $C_{a,b}$ ou D_c contient au plus un élément de H. D'où l'unicité de la partie recherchée, si elle existe.
   Si les parties réelles de z_1 et z_2 sont toutes deux égales à a, la partie D_a contient $\{z_1, z_2\}$.
   Si les parties réelles de z_1 et z_2 sont distinctes la médiatrice du segment $[z_1, z_2]$ n'est pas parallèle à l'axe réel, et le coupe en un point $(\alpha, 0)$, centre de l'unique cercle centré sur l'axe réel, passant par z_1 et z_2. Ce cercle a pour rayon R vérifiant
   $$R^2 = (\alpha - x_1)^2 + y_1^2 = (\alpha - x_2)^2 + y_2^2$$
   Le demi-cercle $C_{a,b}$ passe par z_1 et z_2 si et seulement si $a = \alpha - R$ et $b = \alpha + R$.
2. On obtient
   $$A \cdot z = \frac{ac|z|^2 + (ab + bc)\mathrm{Re}(z) + (ad - bc)\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$
   Donc si $\det A = 1$, la partie imaginaire de $A \cdot z$, $\frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$, est du même signe que celle de z. Le demi-plan H est donc stable par la transformation $z \mapsto A \cdot z$.
   Il reste à vérifier qu'il s'agit d'une action de groupe c'est à dire que pour A et B dans $Sl_2(\mathbf{R})$, et z dans H, $(AB) \cdot z = A \cdot (B \cdot z)$, et $I \cdot z = z$. La dernière égalité est immédiate, pour la première

on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$(AB)\cdot z = \frac{ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+cf+dh}$$

$$\begin{aligned} A\cdot(B\cdot z) &= \frac{a\frac{ez+f}{gz+h}+b}{c\frac{ez+f}{gz+h}+d} \\ &= \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+cf+dh}. \end{aligned}$$

3. Soient a et b deux réels vérifiant $a<b$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit comme la translation horizontale $z \mapsto z-a$, l'image de D_a est donc D_0. L'homographie $z \to \frac{z-a}{(a-b)(z-b)}$ laisse stable la droite réelle, et le cercle de centre d'affixe $\frac{a+b}{2}$ passant par a et b contient aussi $\frac{a+b}{2}+i\frac{b-a}{2}$ et à pour image par cette transformation, la droite (b est le pôle de l'homographie) passant par 0 et $\frac{2i}{b-a}$ soit l'axe imaginaire pur. Par connexité $C_{a,b}$ est envoyé sur la composante connexe de l'axe imaginaire privé de 0, contenue dans H. On peut obtenir aussi le résultat par calcul direct

$$A\cdot(\frac{a+b}{2}+e^{it}\frac{b-a}{2}) = \frac{i\cos\frac{t}{2}}{(b-a)\sin\frac{t}{2}}.$$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $]0,\pi[$, l'image cherchée est D_0.

4. On a

$$\begin{aligned} L(\gamma_{a,b}) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(a-b)^2}}{(a-b)t+b}dt && (3.8)\\ &= -[\ln((a-b)t+b)]_0^1 && (3.9)\\ &= \ln(\frac{b}{a}). && (3.10) \end{aligned}$$

5. On a pour tout chemin γ joignant ia à ib dans H,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geqslant \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)}dt && (3.11)\\ &\geqslant \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}dt && (3.12)\\ &\geqslant \ln(\frac{b}{a}) && (3.13)\\ &\geqslant L(\gamma_{a,b}). \end{aligned}$$

De plus γ étant C^1 par morceaux, pour que l' égalité se produise il faut que pour tout t dans $[0,1]$, $x'(t)=0$ donc que l'image du chemin soit dans D_0.

6. Si $z_1 = ia$ et $z_2 = ib$, d'après la définition de d et les deux questions précédentes la borne inférieure des $L(\gamma)$ est obtenue pour $\gamma_{a,b}$ et $d(z_1,z_2) = \ln(\frac{b}{a})$.
7. D'après la question 3, la partie Δ_{z_1,z_0} définie en question 1 est de la forme D_a où $C_{a,b}$. D'après la question 2, si elle est de la forme D_a, on peut choisir g comme la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspondant à la transformation $z \to z-a$, si elle est de la forme $C_{a,b}$, il suffit de prendre

pour g la classe de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{-a}{a-b} \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ qui correspond à la transformation $z \to \frac{z-a}{(a-b)(z-b)}$. élément g de $Sl_2(\mathbf{R})$ vérifiant $g \cdot \Delta_{z_1,z_2} = D_0$.

8. Montrons que les éléments de $Sl_2(\mathbf{R})$ agissent comme des isométries. Soit γ un chemin de z_1 à z_2 dans H, et g un élément de $Sl_2(\mathbf{R})$, et $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $Sl_2(\mathbf{R})$. L'application $g \circ \gamma$ bien C^1 par morceaux, à valeurs dans H et joint $g \cdot z_1$ à $g \cdot z_2$. De plus on a

$$L(g \cdot \gamma) = \int_0^1 \frac{\frac{|\gamma'(t)|}{c\gamma(t)+d)^2}}{\frac{\gamma(t)}{c\gamma(t)+d}} dt \tag{3.14}$$

$$= L(\gamma). \tag{3.15}$$

Puisque g est inversible, lorsque γ parcourt les chemins de z_1 à z_2 dans H, $g \circ \gamma$ parcourt les chemins de $g \cdot z_1$ à $g \cdot z_2$, d'où l'égalité $d(g \cdot z_1, g \cdot z_2) = d(z_1, z_2)$. On en déduit $d(z_1, z_2) = \ln(\frac{a}{b})$ où $g \cdot z_1 = ia$, $g \cdot z_2 = ib$ et $a < b$. Le chemin $g^{-1}.\gamma_{a,b}$ réalise le minimum de distance.

9. Soit γ un chemin de z_1 à z_2 dans H, on note $\gamma^\star$ le chemin de z_2 vers z_1 dans H défini par $\gamma^\star(t) = \gamma(1-t)$. Par le changement de variable $t \to 1-t$ dans l'intégrale on obtient l'égalité $L(\gamma^\star) = L(\gamma)$. On a donc $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$. Par construction l'application d est à valeur positive ou nulle. D'après la question précédente la valeur $d(z_1, z_2)$ est atteinte pour un chemin particulier, et est non nulle si $z_1 \neq z_2$.
Soit γ_1 un chemin de z_1 à z_2 et γ_2 un chemin de z_2 à z_3, on pose

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) \text{ si } & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Alors γ est un chemin dans H joignant z_1 à z_3 et

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x_1'(2t)^2 + y_1'(2t)^2}}{y_1(2t)} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{x_2'(2t-1)^2 + y_2'(2t-1)^2}}{y_2(2t-1)} dt.$$

Par les changements de variables $u = 2t$ dans la première intégrale et $v = 2t-1$ on obtient :

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

D'où

$$d(z_1, z_3) \leqslant L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Par passage à la borne inférieure lorsque γ_1 et γ_2 parcourent les chemins de z_1 à z_2 et z_2 à z_3, on obtient :

$$d(z_1, z_3) \leqslant d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

L'application d est donc une distance sur H.

10. Si un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $Sl_2(\mathbf{Z})$ opère trivialement alors

$$\forall z \in H,\ (az+b) = z(cz+d).$$

La fonction polynôme en z, $cz^2 + (d-a)z - b$ s'annule sur l'ensemble infini H donc est identiquement nulle. On obtient donc les égalités $a = d$, $c = 0$, $b = 0$ et $ad - bc = 1$. Soit encore $a = \pm 1$, $d = a$, $c = 0$ et $b = 0$. Le noyau de l'action de $Sl_2(\mathbf{Z})$ est donc $\langle \pm Id \rangle$. Par passage au quotient par le noyau de l'action, le groupe G opère fidèlement sur H.

11. Soit z dans D, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $Sl_2(\mathbf{Z})$

$$(cz+d)\overline{(cz+d)} = c^2|z|^2 + d^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd.$$

Comme $|z| \geqslant 1$ et $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ on obtient

$$|cz+d|^2 = c^2|z|^2 + d^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd \geqslant (|c|-|d|)^2 + |cd|.$$

Les entiers a, b, c, et d sont liés par la relation $ad-bc=1$, on ne peut donc pas avoir simultanément c et d nuls. Donc si $|c| = |d|$ alors $|dc| \geqslant 1$, sinon $(|c|-|d|)^2 \geqslant 1$. La quantité $(|c|-|d|)^2 + |cd|$ est somme de deux entiers positifs, dont l'un au moins est non nul, d'où

$$(|c|-|d|)^2 + |cd| \geqslant 1.$$

12. Par stabilité de H sous l'action de G, pour tout z dans H, $G \cdot z$ est dans H Soit $z = x + iy$. Si n est un entier vérifiant $|x-n| \leqslant \frac{1}{2}$, alors $z' = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$ est dans l'orbite de z ainsi que $-\frac{1}{z'}$. De plus z' ou $-\frac{1}{z'}$ est dans D. On peut donc se ramener au cas $z \in D$.

La partie imaginaire de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z$ étant $\frac{y}{(cz+d)^2}$, d'après la question précédente on a $|cz+d|^2 \geqslant 1$ donc z est de partie imaginaire maximale dans son orbite. De plus pour tout entier n, l'ensemble des couples d'entiers vérifiants $|cz+d| < N$ est fini, donc les ouverts $\{z' \in H, \mathrm{Im}(z') > y\frac{1}{N^2}\}$ contiennent qu'un nombre fini d'éléments de $G \cdot z$, et leur réunion est H. L'orbite $G \cdot z$ est donc une partie discrète de H.

13. Soit z dans $\mathring{D}$ et g dans G tels que $g \cdot z$ soit dans $\mathring{D}$. Quitte à échanger z et z', et g en g^{-1}, on peut supposer $\mathrm{Im}(gz) \geqslant \mathrm{Im}(z)$. Donc $|cz+d| \leqslant 1$. On obtient donc

$$c^2|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd + d^2 = (|c|-|d|)^2 + |cd| = 1$$

Sachant que $|z| > 1$, on ne peut pas avoir $d = 0$. Si $c = 0$ alors $d = \pm 1$, $z' = z + b$. Cela n'est possible dans $\mathring{D}$ que pour $b = 0$ (on regarde les parties réelles). Alors $g = \mathbb{1}$. Si $c \neq 0$ alors $|c| = |d| = 1$ et l'égalité ne peut avoir lieue que pour $|z| = 1$ et $|\mathrm{Re}(z)| = \frac{1}{2}$, un tel point n'est pas dans $\mathring{D}$. On obtient donc

$$\forall g \in G, g \neq \mathbb{1} \Rightarrow g \cdot \mathring{D} \cap \mathring{D} = \varnothing.$$

14. Pour tout z dans H, on peut en utilisant une translation par un entier convenable, et la transformation $z \to -\frac{1}{z}$, se ramener à un élément de D.
Or $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^n$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$. Donc pour tout z dans H il existe g dans G' tel que $g \cdot z \in D$. D'où $H = \bigcup_{g \in G'} g \cdot D$.

Soient $z_0 = 2i$ dans $\mathring{D}$, et g un élément de G, il existe un élément g' de G' tel que $g \cdot z_0 \in g' \cdot D$, soit $g'^{-1}g \cdot z_0 \in D$. Comme z_0 est dans $\mathring{D}$ et que l'action d'un élément de G est bicontinue, $g'^{-1}g \cdot z_0$ est dans $g'^{-1}g \cdot \mathring{(D)}$. Finalement d'après la question précédente $g = g'$ et G est donc contenu dans G'. L'inclusion $G' \subset G$ étant vérifiée par définition de G', on a l'égalité. Comme $-Id = S^2$, le groupe $\langle S, T \rangle$ contient le noyau de la surjection de $Sl_2(\mathbf{Z})$ sur G, et a pour image $G' = G$, c'est $Sl_2(\mathbf{Z})$.

Partie B : Groupe libre sur un alphabet

15. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on a $x1 = 1x = (x_1, \ldots, x_n)$, si $x = 1$, alors $()() = ()$ donc $11 = 1$. L'élément 1 est donc bien un élément neutre.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$ et $z = (z_1, \dots, z_q)$, alors

$$xy = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$$
$$(xy)z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q).$$

De même

$$yz = (y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q)$$
$$x(yz) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q).$$

Dans le cas où l'un des éléments x, y ou z est égal à 1 l'associativité est triviale. La propriété $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$ traduit que la concaténation de deux uplets donne un uplet de longueur la somme des deux.

16. On suppose $xy = xz$. Alors $\ell(xy) = \ell(xz)$, puis $\ell(y) = \ell(z)$.
Si $\ell(xy) = 0$, les mots x, y et z sont tous égaux au mot vide 1.
Supposons maintenant $\ell(xy) > 0$. Si $x = 1$ alors d'après ce qui précède $xy = y$ et $xz = z$ donc $y = z$. Si $x \neq 1$ et $\ell(y) \neq 0$, cela découle de la condition d'égalité de deux n-uplets : $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ si et seulement si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $x'_i = x_i$. Si $y = 1$ alors $\ell(z) = 0$ donc $z = 1$. La deuxième propriété se traite de la même manière.

17. (a) Par construction la relation d'adjacence $\mathcal{A}$ est réflexive (on prend $u = x$, $v = 1$ et a quelconque dans X). La relation $\mathcal{R}$ est donc elle aussi réflexive. La relation $\mathcal{A}$ est aussi clairement symétrique, ainsi que $\mathcal{R}$. La transitivité provient du fait que $x\mathcal{A}x_1, \dots, x_n\mathcal{A}y$ et $y\mathcal{A}y_1$,..., $y_p\mathcal{A}z$ donne une manière de relier x à z. La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence sur $M(X)$.

(b) Il faut montrer que si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ alors $xy\mathcal{R}x'y'$. On remarque d'abord que si $x\mathcal{A}z$ alors $xy\mathcal{A}zy$, en remplaçant v par vy. Ainsi le chemin $x\mathcal{A}x_1 \dots x_k\mathcal{A}x'$ donne un chemin $xy\mathcal{A}x_1y \dots x_ky\mathcal{A}x'y$. On a aussi $y\mathcal{A}z$ donne $x'y\mathcal{A}x'z$. On construit ainsi un chemin de xy à $x'y$ puis de $x'y$ a $x'y'$ d'où le résultat.
On peut donc définir le produit $s(x).s(y) = s(xy)$.

(c) L'associativité du produit des classes provient de celle du produit dans $M(X)$ par passage au quotient. On remarque que pour tout élément a de X, $aa^\star\mathcal{R}1$ et $a^\star a\mathcal{R}1$, d'où $s(a).(a^\star) = s(a^\star).s(a) = s(1)$, et $s(a)$ est inversible d'inverse $s(a^\star)$. On a de même

$$x_1 \dots x_n x_n^\star \dots x_1^\star \mathcal{R} 1,$$

donc la loi de composition est une loi de groupe d'élément neutre $s(1)$, l'inverse de $s(x_1 \dots x_n)$ étant $s(x_n^\star \dots x_1^\star)$. De plus $s(x_1 \dots x_n) = s(x_1) \dots s(x_n)$. Le sous-groupe engendré par $s(X)$ contient $s(X^\star)$, donc $M(X)/\mathcal{R}$ tout entier.

18. On raisonne alors par récurrence sur n, en montrant que r est bien définie sur $\bigcap_{0 \leqslant i \leqslant n} M_i(X)$, à valeurs dans $F(X)$ et vérifie $\ell(rx) \leqslant \ell(x)$ et $s(r(x)) = s(x)$.
— Un mot de longueur 1 ne peut pas être adjacent au mot vide, car dans l'ensemble $\{uv, uaa^\star v, ua^\star av\}$ il y a deux mots sur 3 de longueur au moins 2. Donc r est définie sur $M_0(X)$ et $M_1(X)$, à valeurs dans $F(X)$.
-
— Supposons l'hypothèse vérifiée pour $n \geqslant 1$ et soit $u = u_1 \dots u_n u_{n+1}$. Alors $r(u_1 \dots u_n)$ est défini et à valeurs dans $F(X)$. Si $r(u_1 \dots u_n) = 1$ alors $r(u_1 \dots u_n u_{n+1}) = u_{n+1}$ est bien réduit et de longueur inférieure ou égale à $n + 1$. Sinon $r(u_1 \dots u_n) = t_1 \dots t_k$, avec $k \leqslant n$. Il y a 3 cas a examiner :
(a) $t_k \neq u_{n+1}^\star$, alors $r(u_1 \dots u_{n+1}) = t_1 \dots t_k u_{n+1}$,
(b) $k = 1$ et $t_1 = u_{n+1}^\star$ alors $r(u_1 \dots u_{n+1}) = 1$
(c) $k \geqslant 2$ et $t_k = u_{n+1}^\star$ alors $r(u_1 \dots u_{n+1}) = t_1 \dots t_k$

Donc r est bien définie sur $\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n+1} M_i(X)$. L'égalité $s(r(ua)) = s(ua)$ se vérifie sans difficulté pour chaque cas, en utilisant la propriété $s(x).s(y) = s(xy)$. De plus $r(u_1 \dots u_{n+1})$ ne peut pas s'écrire sous la forme $uaa^\star v$ ou $ua^\star av$ pour a dans X, dans chacun des cas possible du fait que $t_1 \dots t_k$ est déjà réduit.

Cette discussion démontre le résultat demandé

19. L'algorithme de calcul de $r(x)$ donne immédiatement $r(xy) = r(r(x)y)$, or $r(uaa^\star) = r(u)$ donc r est constante sur $\{uv, uaa^\star v, ua^\star av\}$, puis $r(x) = r(y)$ dès que x et y sont adjacents. En considérant un chemin de x à y par des éléments adjacents on obtient que r est constante sur la classe d'équivalence d'un élément x de $M(X)$ pour la relation $\mathcal{R}$. En particulier $\ell(r(x))$ est minimal sur $s(x)$.

    Pour montrer l'unicité, on remarque que la fonction ℓ étant à valeur dans $\mathbf{N}$, il existe dans chaque classe $s(x)$ un élément de longueur minimale x'. Les éléments adjacents étant dans la même classe, x' est donc réduit. Si $x' = t_1 \dots t_k$ est réduit, le calcul direct donne $r(x') = t_1 \dots t_k$ donc $r(x') = x'$. Le fait que r est constante sur les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$ donne que x' est le seul élément réduit de la classe. On a $x' = \overline{r}(s(x))$.

20. On a donc $s_{|F(x)} \circ \overline{r} = Id_{M(X)/\mathcal{R}}$ et $\overline{r} \circ s_{|F(X)} = Id_{F(X)}$. Donc $s_{|F(X)}$ est donc bijective d'application réciproque $\overline{r}$.

    Poser $r(x).r(y) = s^{-1}_{|F(X)}(s(xy))$ à un sens et définit donc bien une loi de composition sur $F(X)$. Par construction de la loi de composition sur $F(X)$,(transport de structure), $s_{|F(X)}$ est une bijection vérifiant

    $$\forall x, y \in F(X), s_{|F(X)}(r(x).r(y)) = s_{|F(X)}(r(xy)).$$

    Comme $M(X)/\mathcal{R}$ est un groupe. On obtient donc une structure de groupe $F(X)$ par transport de structure, à partir de celle de $M(X)/\mathcal{R}$, et $s_{|F(X)}$ devient alors un isomorphisme de groupe entre $F(X)$ et $M(X)/\mathcal{R}$, d'isomorphisme réciproque $\overline{r}$. Pour cette structure $r(x)^{-1} = s^{-1}_{|F(X)}(s(x)^{-1}) = \overline{r}(s(x)^{-1})$.

21. On remarque d'abord que X est contenu dans $F(X)$ et engendre $F(X)$. Si f est une application de X dans un groupe G, elle se prolonge naturellement à $M(X)$ en posant $f(1) = e_G$ et pour tout a dans X $f(a^\star) = f(a)^{-1}$ puis pour $x_1 \dots x_n$ dans $M(X)$, $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$. Si u et v sont dans $M(X)$ pour tout a dans X, $f(uv) = f(uaa^\star v) = f(ua^\star av)$ donc si x et y sont adjacents alors $f(x) = f(y)$ puis f est constant sur la classe d'équivalence $s(x)$, et définit un morphisme de groupe $\overline{f}$ de $M(X)/\mathcal{R}$ sur G. L'application $\overline{f} \circ s_{|F(X)}$ est l'homomorphisme recherché. Il est unique car déterminé par l'image de X qui engendre $F(X)$.

22. Si G est un groupe et X une partie génératrice de G, l'injection ι de X dans G définit un unique homomorphisme $\widetilde{\iota}$ de $F(X)$ dans G. Comme X engendre G et que pour tout x dans X, $x = \widetilde{\iota}(x)$, $\widetilde{\iota}$ est surjectif.

23. Si X contient au moins deux éléments a et b distincts, alors les mots a, ab, $aba^\star$ et $aba^\star b^\star$ sont réduits. En particulier $\ell(r(aba^\star b^\star)) = 4$ donc $r(a).r(b).r(a)^{-1}.r(b)^{-1} \neq 1$. Le groupe $F(X)$ n'est pas commutatif.

Partie C : Présentation d'un groupe par générateurs et relations

24. L'ensemble $S = \bigcup_{g\in F(X)} gRg^{-1}$ est une partie de $F(X)$, stable par conjugaison. Si K est un sous-groupe de $F(X)$ contenant S alors pour tout g dans $F(X)$, gKg^{-1} contient S. Donc l'intersection $H(R)$ des sous-groupes de $F(X)$ contenant S est un sous-groupe de $F(X)$ contenant S. Il vérifie donc

    $$\forall g \in F(X), H(R) \subset gH(R)g^{-1}.$$

    On en déduit en conjuguant par g^{-1}, les inclusions inverses, puis

    $$\forall g \in F(X), H(R) = gH(R)g^{-1}.$$

De plus si K est un sous-groupe distingué de $F(X)$ contenant R alors $F(X)$ contient chaque conjugué gRg^{-1} de R donc S. L'ensemble des sous-groupes distingués de $F(X)$ contenant R est donc contenu dans l'ensemble des sous-groupes de $F(X)$ contenant S. Comme $H(R)$ est lui-même sous-groupe distingué de $F(X)$, c'est l'intersection des sous-groupes distingués de $F(X)$ contenant S.

25. Si $X = \{a\}$, on note $a^0 = 1$, $a^{\star 0} = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $a^n = \underbrace{a \dots a}_{n}$ et $a^{\star n} = \underbrace{a^\star \dots a^\star}_{n}$. Les éléments de $F(X)$ sont $\{1, a^n, a^{\star n}, n \in \mathbf{N}\}$. L'homomorphisme de $F(X)$ dans $\mathbf{Z}$ défini par $f(a) = 1$ est un isomorphisme. Si $n > 0$ l'image réciproque de $n\mathbf{Z}$ par f est $\{\{a^{nk}, a^{\star nk}, k \in \mathbf{Z}\}$, d'où la présentation de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $\langle \{a\} | \{a^n\} \rangle$.

26. On considère le groupe diédral d'ordre $2n$ qui s'interprète comme le groupe D_{2n} des isométries du polygone régulier à n côtés. Si $X = \{a, b\}$ on considère l'application de X dans D_{2n} telle que $\phi(a)$ soit la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $\phi(a)(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\phi(b)$ la symétrie $\phi(b)(z) = \overline{z}$. L'application ϕ se prolonge en un homomorphisme surjectif de $F(X)$ sur D_{2n} dont le noyau contient a^n, b^2 et $abab$. Si $R = \{a^n, b^2, abab\}$, les classes de a et b modulo $H(R)$ vérifient $\overline{a} = 1$, $\overline{b}^{-1}$ et $\overline{b}\overline{a}\overline{b}^{-}1 = \overline{a}^{-}1$. Le sous-groupe $\langle \overline{a} \rangle$ est donc un sous-groupe distingué de $F(X)/H(R)$, et les classes modulo ce sous-groupe sont engendrées par la classe de $\overline{b}$ qui est d'ordre divisant 2. L'ordre du groupe $F(X)/H(R)$ est donc majoré par $2n$, et comme ce groupe se surjecte sur D_{2n}, on obtient un isomorphisme. Finalement $\langle a, b | \{a^n, b^2, abab\} \rangle$ est une présentation de D_{2n}.

27. $\phi(\sigma^\star) = \phi(\sigma)^{-1} = s$, $\phi(\sigma^2) = s^2 = \mathbb{1}$ et $\phi(\sigma\tau)^3 = (st)^3 = Id$, car $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(ST)^3 = -Id$ d'où $(st)^3 = \mathbb{1}$.

28. Si $n \leqslant 2$, alors $n = 0$ et $x_1 = 1$, ou $n = 2$ et $\phi(x_1 x_2) = \mathbb{1}$ donne $\phi(x_2) = \phi(x_1)^{-1}$. On en déduit $x_1 x_2 \in \{\tau\tau^\star, \tau^\star\tau, \sigma\sigma, \sigma\sigma^\star, \sigma^\star\sigma, \sigma^\star\sigma^\star\}$. Les z_2 sont tous égaux à z_0, et $t \cdot z_0 = 1+2i$, $t^{-1} \cdot z_0 = -1+2i$, $s \cdot z_0 = s^{-1} \cdot z_0 = \frac{i}{2}$.

29. Si $z_i = z_j$ avec $i < j$ alors $\phi(x_0 \dots x_i) \cdot z_0 = \phi(x_0 \dots x_i) \cdot (\phi(x_{i+1} \dots x_j) \cdot z_0)$. Comme l'action de G est fidèle $z_0 = \phi(x_{i+1} \dots x_j) \cdot z_0$ puis $\phi(x_{i+1} \dots x_j) = \mathbb{1}$ et $\phi(x_1 \dots x_i) = \mathbb{1}$. Les longueurs de ces deux mots sont strictement inférieures à n. On suppose dans la suite que l'ensemble des mots réduits appartenant au noyau de ϕ sans appartenir à $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\}))$ est non vide, il existe alors un élément de longueur minimal $x = x_1 \dots x_n$ appartenant à $\ker\phi - H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$. Pour un tel mot les z_i sont donc deux à deux distincts.

30. Le segment de géodésique $[z_i, z_{i+1}]$ est l'image par l'action continue de $\phi(x_1 \dots x_{n-1})$ du segment de géodésique $[z_0, \phi(x_n) \cdot z_0]$. Chaque segment de géodésique $[z_0, s \cdot z_0]$, $[z_0, t \cdot z_0]$ et $[z_0, t^{-1} \cdot z_0]$ ne rencontre que deux orbites de D sous l'action de G, donc leur image par l'action d'un élément de G aussi.

31. On sait que $\sigma \cdot \sigma^* = ()$ dans $F(X)$ et que $s^2 = \mathbb{1}$ donc $\phi(\sigma^\star) = \phi(\sigma)$. On peut donc remplacer σ^* par σ dans l'écriture de x. De plus $\ker\phi$ et $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$ étant stables par conjugaison, toute permutation circulaire des x_i vérifie

$$x_{i+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_i = (x_1 \cdots x_i)^{-1} x_1 \cdots x_n (x_1 \cdots x_i),$$

donc les mêmes hypothèse que x. Si $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \{\tau, \tau^\star\}$ alors x est dans le groupe engendré par τ, et puisque t est d'ordre infini, $\ker\phi \cap \langle\tau\rangle = \{()\}$, ce qui contredit le choix de x. De même s étant d'ordre 2, τ ou $\tau^\star$ appartient à $\{x_1, \dots, x_n\}$. Par permutation circulaire, on peut supposer $x_1 = \sigma$ alors $x_2 \in \{\tau, \tau^\star\}$. Si $x_2 = \tau^\star$, alors $(x_3 \dots x_n)x^{-1}(x_3 \dots x_n)^{-1}$ s'écrit $\tau\sigma y_3 \dots y_n$, et se trouve dans la même classe de conjugaison que x. Son appartenance à $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\}$ est donc équivalente à celle de x.

32. On remarque, d'après la question 13 qu'une orbite de D ne peut contenir qu'un seul élément z_i. Donc les orbites de $x_1 \cdots x_i D$ ne dépend que de z_i. On a $z_1 = \frac{i}{2} \in s \cdot D$ et $z_2 = \frac{-1+4i}{5} \in st \cdot D$. Comme la partie réelle de z_2 est strictement négative, et que D_0 est entièrement contenue dans

$D \cup sD$, par connexité des segments de géodésiques $[z_i, z_{i+1}]$ la partie réelle de z_i ne peut redevenir positive ou nulle qu'en repassant par z_0 ou z_1, et donc par hypothèse cela ne peut se produire que pour $z_n = z_0$.

33. Le segment de géodésique $[z_{n-1}, z_n]$ aboutit dans D, comme il ne rencontre que deux orbites de D, l'autre orbite est à choisir parmi $t^{-1}D$ ou sD. L'orbite sD contenant z_1 est déjà prise, donc reste $t^{-1}D$, puis $z_{n-1} = t^{-1} \cdot z_0$. D'où $\phi(x_1 \dots x_{n-1}) = t^{-1}$ et $x_n = \tau$.
34. Par connexité, pour que le chemin allant de z_2 vers z_{n-1} empruntant les géodésiques, aboutisse, il faut passer par l'orbite $t^{-1}sD$, car les orbites qui partagent un segment de frontière avec $t^{-1}D$ sont $t^{-2} \cdot D$, $t^{-1}s \cdot D$ et D (images par t^{-1} des orbites de D partageant un segment de frontière avec D). Pour arriver dans $t^{-2}D$ sans passer par $t^{-1}D$ il faut déjà passer par $t^{-1}sD$, donc il existe un indice $2 < i < n-1$ tel que $z_i \in t^{-1}s \cdot D$.
35. On obtient immédiatement $\phi(x_1 \cdots x_i \sigma\tau) = \mathbb{1}$ et $\phi(\tau^\star \sigma x_{i+1} \cdots, x_n) = \mathbb{1}$.
36. La longueur de $\tau^\star \sigma x_{i+1} \dots x_n$ est $n-i+2 < n$, donc par minimalité de n, $\tau^\star \sigma x_{i+1} \dots x_n$ est dans $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$. La longueur de $x_1 \dots x_i \sigma\tau$ est $i+2 \leqslant n$. Le cas d'égalité avec n correspond à $i = n-2$, dans ce cas $z_{n-2} = t^{-1}s \cdot z_0$ donc $x_{n-1} = s$ puis $x_1 \dots x_i \sigma\tau = (\sigma\tau)^2 x_3 \dots x_i$ est conjugué à $x_1 \dots x_{n-2}\sigma\tau$, et $\phi((\sigma\tau)^2) = \phi(\tau^\star\sigma)$, donc $\tau^\star \sigma x_2 \dots x_{n-2}$ est dans $\ker\phi$ et de longueur $n-2$, donc dans $H(R)$, puis x, ce qui donne une contradiction. Conclusion $\ker\phi = H(R)$.
37. On considère l'application de $\{\sigma, \tau\}$ dans $Sl_2(\mathbf{Z})$ définie par $\psi(\sigma) = S$ et $\psi(\tau) = T$. D'après la question 14, et la question 22, le morphisme associé ψ $F(\{\sigma, \tau\})$ dans $Sl_2(\mathbf{Z})$ est surjectif. Par composition avec la surjection sur G, on obtient le morphisme ϕ étudié dans les questions précédentes. Donc le noyau de ψ est contenu dans $\ker\phi = H(R)$. D'autre part $\psi(\sigma^2) = -Id$, $\psi(\sigma^4) = Id$ et $\psi(\sigma^2(\sigma\tau)^3) = Id$ donc

$$H(R') = H(\{\sigma^4, \sigma^2(\sigma\tau)^3\})\rangle \subseteq \ker\psi \subsetneq H(R).$$

De plus $\psi(\sigma^2)$ étant dans le centre, pour tout x dans $F(\{\sigma, \tau\})$, $\psi(x\sigma x^{-1}) = \psi(\sigma)$. Or les classes de σ^2, et $(\tau\sigma)^3$ modulo $H(R')$ sont inverses l'une de l'autre, et on a les égalités

$$\sigma^{-1}\sigma^2(\sigma\tau)^3\sigma = \sigma^2(\tau\sigma)^3$$
$$\tau(\sigma\tau)^3\tau^{-1} = (\tau\sigma)^3.$$

On en déduit que modulo $H(R')$, $\tau\sigma^{-2}\tau^{-1}$ est dans la même classe que σ^{-2}. La classe de σ^2 est donc un élément du centre de $F(\{\sigma, \tau\})/H(R')$. Le quotient $H(R)/H(R')$ est donc engendré par la classe de σ^2 qui est d'ordre 2. Il n'y a donc pas de sous-groupe de $H(R)$, contenant $H(R')$ en dehors de $H(R)$ et $H(R')$. Comme $\ker\psi \neq H(R)$, on a $\ker\psi = H(R')$. D'où la présentation de $Sl_2(\mathbf{Z})$ par $\langle\{\sigma, \tau\}|\{\sigma^4, \sigma^2(\sigma\tau)^3\}\rangle$.

3.4 Corrigé détaillé du problème d'analyse et probabilités

Partie A : représentation de l'espace de Hardy

1. Montrons d'abord que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions holomorphes. Tout d'abord, la fonction nulle appartient clairement à $\mathcal{H}$. Soit $F, G \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbf{C}$. La fonction $F + \lambda G$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}_+$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a, pour tout $y > 0$,

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |(F+\lambda G)(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.16}$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} + |\lambda| \left(\int_{\mathbf{R}} |G(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.17}$$
$$\leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + |\lambda| \, \|G\|_{\mathcal{H}}.$$

En prenant le sup du membre de gauche pour $y > 0$, on obtient que $F + \lambda G \in \mathcal{H}$, et que $\|F + \lambda G\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + |\lambda| \ \|G\|_{\mathcal{H}}$. Donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions holomorphes. Vérifions que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur $\mathcal{H}$:
— Clairement, pour tout $F \in \mathcal{H}$, on a $\|F\|_{\mathcal{H}} \geqslant 0$;
— Non-dégénérescence : Soit $F \in \mathcal{H}$ telle que $\|F\|_{\mathcal{H}} = 0$. Alors pour tout $y > 0$, $\int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \mathrm{d}x = 0$. Comme F est continue sur $\mathbf{C}_+$ (car holomorphe), on en déduit que $F(x+iy) = 0$ pour tout $x + iy \in \mathbf{C}_+$. Donc $F = 0$.
— Inégalité triangulaire : on a déjà montré que $\|F + G\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + \ \|G\|_{\mathcal{H}}$ pour tout $F, G \in \mathcal{H}$.
— Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ quelconque, $F \in \mathcal{H}$. On a, pour tout $y > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}} |\lambda F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = |\lambda| \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

et donc en passant au sup $\|\lambda F\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \ \|F\|_{\mathcal{H}}$.

2. (a) Soit $z \in \mathbf{C}_+$ quelconque. On écrit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, $y > 0$. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en observant que $|e^{i\xi z}| = e^{-\xi y}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f_0(\xi)| \ |e^{i\xi z}| \, \mathrm{d}\xi &\leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \left(\int_0^\infty e^{-2\xi y} d\xi \right)^{1/2} \\ &\leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \frac{1}{\sqrt{2y}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc la fonction $\xi \in [0, +\infty[\mapsto f_0(y) e^{i\xi z}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et F est bien définie.

(b) Soit $\delta > 0$ quelconque. On observe que :
— Pour tout $\xi \in [0, +\infty[$, la fonction $z \in \mathbf{C}_+ \mapsto f_0(\xi) e^{i\xi z}$ est continue ;
— Pour tout $z \in \mathbf{C}_+$ tel que $\mathrm{Im}(z) \geqslant \delta$, pour tout $\xi \in [0, +\infty[$, on a

$$|f_0(\xi) e^{i\xi z}| \leqslant |f_0(\xi)| e^{-i\xi\delta},$$

et

$$\int_0^\infty |f_0(\xi)| e^{-i\xi\delta} \, d\xi \leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \frac{1}{\sqrt{2\delta}} < +\infty.$$

D'après les théorèmes de continuité des intégrales à paramètre, F est continue sur $\{z \in \mathbf{C}_+, \mathrm{Im}(z) \geqslant \delta\}$ pour tout $\delta > 0$, et par conséquent sur $\mathbf{C}_+$.

(c) Pour tout $\xi \geqslant 0$, $h \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}$, on a

$$\left| \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \right| = \left| i \int_0^\xi e^{ith} \, \mathrm{d}t \right| \tag{3.19}$$

$$\leqslant \int_0^\xi \exp(-t\mathrm{Im}(h)) \, \mathrm{d}t \tag{3.20}$$

$$\leqslant \int_0^\xi \exp(t \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}) \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} \exp\left(\xi \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2} \right).$$

(d) Soit $z_0 \in \mathbf{C}_+$, et soit $h \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}$. On écrit

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{i\xi z_0} \, \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \, d\xi.$$

On a :
— Pour tout $\xi \geqslant 0$, $\lim_{h \to 0} f_0(\xi) e^{i\xi z_0} \ \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} = i\xi f_0(\xi) e^{i\xi z_0}$.

— D'après la question précédente, pour tout $\xi \geqslant 0$, et pour tout $h \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}$,

$$\left| f_0(\xi) e^{i\xi z_0} \, \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \right| \leqslant |f_0(\xi)| \exp(-\mathrm{Im}(z_0)\xi) \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} \exp\left(\xi \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}\right) \tag{3.21}$$
$$\leqslant \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} |f_0(\xi)| \exp\left(-\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}\xi\right),$$

et

$$\int_0^\infty \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} |f_0(\xi)| \exp\left(-\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}\xi\right) \leqslant \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}(z_0)}}.$$

D'après les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètre, F est dérivable (au sens complexe) en z_0, de dérivée

$$F'(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty i\xi f_0(\xi) e^{i\xi z_0} d\xi.$$

Donc F est holomorphe sur $\mathbf{C}_+$.

(e) Soit $(x, y) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[$. On a

$$F(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{-\xi y} e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi.$$

Définissons $g_y : \xi \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_{\xi>0} f_0(\xi) e^{-\xi y}$. Alors $g_y \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, et par définition $F(x+iy) = \widehat{g_y}(-x)$. D'après l'identité de Plancherel, la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto F(x + iy)$ est de carré intégrable, et

$$\int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} |g_y(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 \exp(-2\xi y) \, \mathrm{d}\xi.$$

(f) Daprès la question 2.(d), F est holomorphe dans $\mathbf{C}_+$. De plus, d'après la question 2. (e), on a, pour tout $y > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 \exp(-2\xi y) \, \mathrm{d}\xi \leqslant \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

Donc

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

En particulier, $F \in \mathcal{H}$ et $\|F\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)}$.

Montrons à présent qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente : pour tout $y > 0$, on a $|f_0(\xi)|^2 \exp(-2\xi y) \leqslant |f_0(\xi)|^2$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{y\to 0} \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 \exp(-2\xi y) \, \mathrm{d}\xi = \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

Donc $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}$

3. (a) Soit $F \in \mathcal{H}$, $\delta > 0$, $\zeta \in \mathbf{C}_+$ tel que $\mathrm{Im}(\zeta) > \delta$, et $r \in]0, \delta]$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre ζ et de rayon r. Les hypothèses sur ζ et r assurent que $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}_+$. D'après la formule intégrale de Cauchy, comme F est holomorphe dans $\mathbf{C}_+$,

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{z - \zeta} \, \mathrm{d}z.$$

Si $z \in \mathcal{C}$, on écrit $z = \zeta + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

En mutlipliant l'égalité précédente par r et en intégrant sur $]0, \delta]$, on obtient

$$\frac{\delta^2}{2} F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} F(\zeta + re^{i\theta}) r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r.$$

En utilisant les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on arrive à

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} F(\zeta + x + iy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

(b) On remarque que

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$$

Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou l'inégalité de Jensen, on obtient

$$|F(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} |F(\zeta + x + iy)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Or le disque du plan complexe $\{(\zeta + x + iy) \in \mathbf{C},\ |x + iy| \leqslant \delta\}$ est inclus dans le carré $\mathcal{R}$ de côté 2δ défini par $\mathcal{R} := \{(\xi + i\eta) \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(\zeta) - \delta \leqslant \xi \leqslant \mathrm{Re}(\zeta) + \delta,\ \mathrm{Im}(\zeta) - \delta \leqslant \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta\}$. De plus, $\mathrm{Im}(\zeta) - \delta > 0$. Donc

$$|F(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{\mathcal{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \tag{3.22}$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi\delta} \sup_{\mathrm{Im}(\zeta) - \delta \leqslant \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathrm{Re}(\zeta) - \delta}^{\mathrm{Re}(\zeta) + \delta} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi \tag{3.23}$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi\delta} \sup_{0 < \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathbf{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi.$$

Par hypothèse, $F \in \mathcal{H}$, donc

$$\sup_{0 < \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathbf{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

On en déduit que $\sup_{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta} |F(\zeta)| \leqslant \sqrt{2/(\pi\delta)} \|F\|_{\mathcal{H}}$. Donc F est bornée sur l'ensemble $\{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta\}$.

(c) Soit $F \in \mathcal{H}$ vérifiant l'hypothèse **(H)**. Soit $\delta > 0$, et soit $y_1, y_2 \in]\delta, +\infty[$. Justifions tout d'abord que l'intégrale $\int_{L_j} F(z) e^{-iz\xi}\, dz$ est bien définie pour $j = 1, 2$: puisque F vérifie l'hypothèse **(H)** et que $y_j > \delta$, on a, pour tout $x + iy_j \in L_j$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$|F(x + iy_j) e^{-i\xi z}| \leqslant e^{y_j \xi} \frac{C_\delta}{1 + x^2},$$

et le membre de droite est intégrable (en x) sur $\mathbf{R}$. Donc la fonction $z \mapsto F(z) e^{-i\xi z}$ est intégrable sur L_j. Remarquons que si $y_1 = y_2$, l'égalité demandée est triviale, on se concentre donc sur $y_1 \neq y_2$, et sans perte de généralité on suppose $y_1 < y_2$.

Soit $R \geqslant 1$ quelconque. On considère le lacet γ_R suivant, que l'on oriente dans le sens trigonométrique :

$$\gamma_R := \{x + iy_1,\ x \in [-R, R]\} \cup \{R + iy,\ y \in [y_1, y_2]\} \tag{3.24}$$
$$\cup \{x + iy_2,\ x \in [-R, R]\} \cup \{-R + iy,\ y \in [y_1, y_2]\}.$$

On remarque que $\gamma_R \subset \mathbf{C}_+$. Pour $\xi \in \mathbf{R}$ quelconque, on considère la fonction $z \in \mathbf{C}_+ \mapsto F(z)\exp(-i\xi z)$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbf{C}_+$ comme produit de fonctions holomorphes. D'après le théorème intégral de CAUCHY,

$$\int_{\gamma_R} F(z)\exp(-i\xi z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_R} F(z)\exp(-i\xi z)\,\mathrm{d}z && (3.25)\\
&= \int_{-R}^{R} F(x+iy_1)e^{-i\xi x+y_1\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} F(R+iy)e^{-i\xi R+yxi}\,dy && (3.26)\\
&- \int_{-R}^{R} F(x+iy_2)e^{-i\xi x+y_2\xi}\,\mathrm{d}x - \int_{y_1}^{y_2} F(-R+iy)e^{i\xi R+yxi}\,dy.
\end{aligned}$$

Puisque $z \mapsto F(z)\exp(-i\xi z)$ est intégrable sur L_j pour $j = 1, 2$, on a

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} F(x+iy_j)e^{-i\xi x+y_j\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{L_j} F(z)e^{-iz\xi}\,dz.$$

De plus,

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F(\pm R+iy)e^{\mp i\xi R+yxi}\,dy\right| \leqslant e^{y_2|\xi|}(y_2-y_1)\frac{C_\delta}{1+R^2},$$

et le membre de droite tend vers zéro quand $R \to \infty$. En passant à la limite, on obtient donc, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{L_1} F(z)e^{-iz\xi}\,dz = \int_{L_2} F(z)e^{-iz\xi}\,dz.$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
\int_{L_j} F(z)e^{-iz\xi}\,dz = \int_{\mathbf{R}} F(x+iy_j)e^{-i\xi x+y_j\xi}\,\mathrm{d}x &= e^{y_j\xi}\int_{\mathbf{R}} F_{y_j}(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \qquad (3.27)\\
&= e^{y_j\xi}\sqrt{2\pi}\widehat{F_{y_j}}(\xi).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, pour tout $y_1, y_2 > \delta$,

$$\widehat{F_{y_1}}(\xi)e^{y_1\xi} = \widehat{F_{y_2}}(\xi)e^{y_2\xi}.$$

Comme δ est arbitraire, on en déduit que cette égalité est vérifiée pour tout $y_1, y_2 > 0$.

(d) Soit $F \in \mathcal{H}$ quelconque. D'après la question 3.(b), pour tout $\delta > 0$, F est bornée sur l'ensemble $\{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta\}$, on pose donc $C_\delta = \sup_{\zeta\in\mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta)>\delta} |F(\zeta)|$. Pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y > \delta$, on a

$$|F^\epsilon(x+iy)| = \frac{|F(x+iy)|}{|1-i\varepsilon z|^2} \leqslant \frac{C_\delta}{(1+\varepsilon y)^2+\varepsilon^2x^2} \leqslant \frac{C_\delta}{\varepsilon^2(1+x^2)}.$$

Donc F^ϵ vérifie l'hypothèse **(H)**. De plus, on a les propriétés suivantes :
— $|F^\varepsilon(z)| \leqslant |F(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$ (donc en particulier $|F^\varepsilon(z) - F(z)|^2 \leqslant 4|F(z)|^2$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$) ;
— $\lim_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon(z) = F(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$;
— $\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 < +\infty$ pour tout $y > 0$.

D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}} |F^\varepsilon(x+iy) - F(x+iy)|^2 \, dx = 0.$$

Autrement dit, $\|F_y^\varepsilon - F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.
D'après la question 3.(c), comme F^ϵ vérifie l'hypothèse **(H)**,

$$\widehat{F_{y_1}^\varepsilon}(\xi) e^{y_1 \xi} = \widehat{F_{y_2}^\varepsilon}(\xi) e^{y_2 \xi} \quad \forall y_1, y_2 > 0. \tag{3.28}$$

D'après l'identité de Plancherel, on a, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\widehat{F_y^\varepsilon} - \widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|F_y^\varepsilon - F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0.$$

Or la convergence dans L^2 entraine la convergence presque partout à une sous-suite près. Ainsi, il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et des ensembles $B_{y_1},\ B_{y_2} \subset \mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue nulle, tels que, pour $j = 1, 2$,

$$\lim_{k \to \infty} \widehat{F_{y_j}^{\varepsilon_k}}(\xi) = \widehat{F_{y_j}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R} \backslash B_{y_j}.$$

On pose $A_{y_1,y_2} = B_{y_1} \cup B_{y_2}$. Alors $A_{y_1,y_2} \subset \mathbf{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle, et en passant à la limite dans (3.28), on obtient

$$\widehat{F_{y_1}}(\xi) e^{y_1 \xi} = \widehat{F_{y_2}}(\xi) e^{y_2 \xi} \quad \forall \xi \in \mathbf{R} \backslash A_{y_1,y_2}.$$

(e) On prend $y_1 = 1$, $y_2 = y$ dans la question précédente, et on pose $f_0(\xi) = \widehat{F_1}(\xi) e^{\xi}$. Comme $\widehat{F_1} \in L^2(\mathbf{R})$, f_0 est de carré intégrable sur tout compact de $\mathbf{R}$, et pour tout $y > 0$, pour tout $\xi \in \mathbf{R} \backslash A_{1,y}$,

$$\widehat{F_y}(\xi) = f_0(\xi) e^{-\xi y}.$$

(f) Soit $y > 0$ quelconque. On rappelle que $\widehat{F_y} \in L^2(\mathbf{R})$, et que $A_{1,y}$ est de mesure nulle. Donc

$$\int_{\mathbf{R}} |\widehat{F_y}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi.$$

Par ailleurs, d'après l'égalité de Plancherel, $\|F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|\widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sup_{y>0} \|F_y\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \sup_{y>0} \|\widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.29}$$

(g) Par définition de E_n, on a, pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{n^2} e^{2y/n} \mathrm{mes}(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi.$$

Donc

$$\mathrm{mes}(E_n) \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 n^2 e^{-2\frac{y}{n}} \quad \forall y > 0.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $y > 0$ et que le membre de gauche ne dépend pas de y, on en déduit, en faisant tendre y vers $+\infty$, que $\mathrm{mes}(E_n) = 0$. Par additivité de la mesure de Lebesgue, on a également

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n \right) = 0.$$

Or $\cup_{n \in \mathbf{N}} E_n = \{\xi < 0,\ f_0(\xi) \neq 0\}$. Donc $f_0(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi < 0$.

(h) Les résultats des deux questions précédentes impliquent que

$$\sup_{y>0}\int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\,\mathrm{d}\xi = \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Or d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 < +\infty,$$

donc $f_0 \in L^2([0,+\infty[)$. De plus, on a $\widehat{F_y}(\xi) = \mathbf{1}_{\xi>0} f_0(\xi) e^{-\xi y}$ pour tout $y>0$ et pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$. Donc $\widehat{F_y} \in L^1(\mathbf{R})$ (comme produit de deux fonctions de L^2), et d'après la formule de transformée de Fourier inverse, on a, pour tout $y>0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F(x+iy) = F_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \widehat{F_y}(\xi) e^{i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f_0(\xi) e^{-\xi y} e^{i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Donc F est reliée à f_0 par la formule (1).

Partie B : comportement des fonctions de l'espace de Hardy lorsque $y \to 0$

Soit $F \in \mathcal{H}$ et soit $f_0 \in L^2([0,+\infty[)$ telle que la formule (1) de l'énoncé soit vérifiée.

4. On étend f_0 par zéro sur $]-\infty,0[$, et on note encore f_0 l'extension, de sorte que $f_0 \in L^2(\mathbf{R})$. On définit $g_0 = \mathcal{F}^{-1} f_0 \in L^2(\mathbf{R})$. D'après la définition (1), on a, avec les notations de la partie précédente, $F_y = \mathcal{F}^{-1}(\xi \in \mathbf{R} \mapsto f_0(\xi) e^{-\xi y})$ pour tout $y>0$. Par conséquent, pour tout $y>0$, d'après l'égalité de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy) - g_0(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \|F_y - g_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 && (3.30)\\
&= \|\widehat{F_y} - \widehat{g_0}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 && (3.31)\\
&= \int_0^\infty \left| f_0(\xi) e^{-\xi y} - f_0(\xi)\right|^2 && (3.32)\\
&= \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 \left(1 - e^{-\xi y}\right)^2\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée, le membre de droite tend vers zéro quand $y \to 0$. Soit $f_0' \in L^2([0,+\infty[)$ une autre fonction telle que la formule (1) de l'énoncé soit vérifiée. On définit de nouveau $g_0' = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} f_0')$. On a donc $\lim_{y\to 0}\|F_y - g_0'\|_{L^2} = 0$. Par unicité de la limite dans $L^2(\mathbf{R})$, nécessairement $g_0 = g_0'$ dans $L^2(\mathbf{R})$. Donc $\widehat{g_0} = \widehat{g_0'}$ et $f_0 = f_0'$.

5. Pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $y \in]0,+\infty[$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-|\xi|y + i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^0 e^{\xi(y+ix)}\,d\xi + \int_0^{+\infty} e^{\xi(-y+ix)}d\xi = \frac{1}{y+ix} - \frac{1}{-y+ix} = \frac{2y}{y^2+x^2}.$$

6. On vérifie aisément que

$$P_y(t) = \frac{1}{y}P\left(\frac{t}{y}\right), \text{ avec } P(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \forall y>0.$$

La fonction P est intégrable sur $\mathbf{R}$ et

$$\int_{\mathbf{R}} P(s)\,ds = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}(+\infty) - \mathrm{Arctan}(-\infty)\right] = 1.$$

7. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On écrit
$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$, considérons la fonction $G : (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto f(t) e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x}$. Alors $|G(t,\xi)| \leqslant |f(t)| e^{-|\xi| y}$, et d'après le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} |G(t,\xi)| \, dt \, \mathrm{d}\xi = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt \right) \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-|\xi| y} dy \right) < +\infty,$$
donc G est intégrable sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. D'après le théorème de Fubini-Lebesgue,
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} G(t,\xi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x} d\xi \right) f(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.33}$$
D'après la question 5,
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x} d\xi = \frac{2y}{y^2 + (x-t)^2} = 2\pi P_y(x-t).$$
Donc
$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) P_y(x-t) \, \mathrm{d}t.$$
En changeant de variable dans la dernière intégrale ($u = x - t$), on obtient l'égalité recherchée.
Supposons que $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, et posons $f_0 = \widehat{g_0}$. Puisque $f_0(\xi) = 0$ pour tout $\xi < 0$, d'après l'égalité précédente, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$,
$$F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{i\xi x - \xi y} \, \mathrm{d}\xi \tag{3.34}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{g_0}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi \tag{3.35}$$
$$= \int_{\mathbf{R}} g_0(x-t) P_y(t) \, \mathrm{d}t.$$

8. Tout d'abord, remarquons que $\int_{\mathbf{R}} P_y = \int_{\mathbf{R}} P = 1$.
Si $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $y > 0$,
$$F(x+iy) - g_0(x) = \int_{\mathbf{R}} (g_0(x-t) - g_0(x)) \, P_y(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} (g_0(x-yt) - g_0(x)) \, P(t) \, \mathrm{d}t.$$
Dans l'intégrale du membre de droite, on a $\lim_{y\to 0} (g_0(x-yt) - g_0(x)) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et
$$|(g_0(x-yt) - g_0(x)) \, P(t)| \leqslant 2\|g_0\|_\infty P(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \forall y > 0,$$
avec $P \in L^1(\mathbf{R})$. D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lim_{y\to 0} (F(x+iy) - g_0(x)) = 0.$$

Partie C : transformée de HARDY

Soit

$$E = \left\{ g \in L^2(\mathbf{R}),\ \widehat{g}(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \leqslant 0 \right\}.$$

9. Clairement, la fonction nulle appartient à E, et si $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $f + \lambda g \in E$ par linéarité de la transformée de FOURIER. Donc E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbf{R})$. Montrons qu'il est fermé : soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E qui converge vers f dans $L^2(\mathbf{R})$. D'après l'égalité de PLANCHEREL, on a également $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0$. Donc il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\widehat{f_{n_k}}(\xi) \to \widehat{f}(\xi)$ quand $k \to \infty$ pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$. Comme $\widehat{f_{n_k}}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$, on a aussi $\widehat{f}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$. Donc $f \in E$. Par conséquent E est fermé.

10. Soit $g \in L^2(\mathbf{R})$. On pose $\tilde{g} := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto \mathbf{1}_{\xi>0}\ \widehat{g}) \in L^2(\mathbf{R})$. Montrons que $\tilde{g} = \Pi(g)$:
— On a clairement $\tilde{g} \in E$;
— Soit $h \in E$ quelconque. Alors d'après l'identité de PARSEVAL,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (g - \tilde{g})\bar{h} &= \int_{\mathbf{R}} (\hat{g}(\xi) - \mathbf{1}_{\xi>0}\ \hat{g}(\xi))\, \overline{\widehat{h}(\xi)} \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\xi\leqslant 0} \hat{g}(\xi) \overline{\widehat{h}(\xi)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Comme $h \in E$, $\widehat{h}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$, et par conséquent le membre de droite est identiquement nul. Donc $g - \tilde{g} \in E^{\perp}$.

Donc $\tilde{g} = \Pi(g)$.

11. Soit $g \in E$ quelconque. On pose $f_0 = \hat{g} \in L^2(\mathbf{R})$. Par hypothèse, $f_0(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$. On définit F par la formule (1) de l'énoncé. Alors $F \in \mathcal{H}$ d'après la question 2, et d'après la partie B, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{y\to 0} F(x + iy) = g(x).$$

Par ailleurs, soit $H \in \mathcal{H}$ telle que $\lim_{y\to 0} H(x + iy) = g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. D'après la question 3, il existe $h_0 \in L^2([0, +\infty[)$ telle que H et h_0 sont reliées par la formule (1). D'après la partie B, on a alors $\lim_{y\to 0} H(x + iy) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} h_0)(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. Donc $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} h_0)$, et $h_0 = f_0$. Par suite, $H = F$.
Ainsi, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{H}$ telle que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{y\to 0} F(x + iy) = g(x).$$

12. Par définition, $Hf = i(f - 2\Pi f)$, donc $Hf \in L^2(\mathbf{R})$. De plus, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a, d'après la question 10,

$$\widehat{Hf}(\xi) = i\left(\hat{f}(\xi) - 2\mathbf{1}_{\xi>0}\hat{f}(\xi)\right) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Si f est à valeurs réelles, on a, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$. Par conséquent, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\overline{\widehat{Hf}(\xi)} = i\mathrm{sgn}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} = -i\mathrm{sgn}(-\xi)\widehat{f}(-\xi)\widehat{Hf}(-\xi).$$

Donc Hf est à valeurs réelles.

13. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. On pose $g = 2\Pi f \in E$. D'après la question 11, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{H}$ telle que pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ $\lim_{y\to 0} F(x+iy) = g(x)$. De plus, par définition, $g = f + iHf$ et f et Hf sont à valeurs réelles. Donc $f = \mathrm{Re}(g)$ et $Hf = \mathrm{Im}(g)$. Par conséquent, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{Re}(F(x+iy)) = f(x), \quad \lim_{y\to 0} \mathrm{Im}(F(x+iy)) = (Hf)(x).$$

14. Comme à la question précédente, on pose $g = 2\Pi f = f + iHf \in E$, et on a, d'après la partie B,

$$F(x+iy) = \int_{\mathbf{R}} g(x-t)P_y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme P_y, f et Hf sont à valeurs réelles, on a

$$u(x,y) = (f * P_y)(x) = \mathrm{Re}(F(x+iy)), \quad v(x,y) = (Hf * P_y)(x) = \mathrm{Im}(F(x+iy)).$$

Donc u et v sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction holomorphe F. D'après les formules de Cauchy-Riemann, ce sont des fonctions harmoniques conjuguées :

$$\begin{aligned} \Delta u = \Delta v = 0 \quad &\text{dans } \mathbf{R}\times]0,+\infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad &\text{dans } \mathbf{R}\times]0,+\infty[. \end{aligned}$$

15. Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ quelconques. Par définition de l'adjoint, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} H^*f\ \bar{g} &= \int_{\mathbf{R}} f\ \overline{Hg} && (3.37)\\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}\ \overline{\widehat{Hg}} \quad \text{(identité de Parseval)} && (3.38)\\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)\ \overline{-i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi && (3.39)\\ &= \int_{\mathbf{R}} i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\ \overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi && (3.40)\\ &= -\int_{\mathbf{R}} \widehat{Hf}\bar{\hat{g}} && (3.41)\\ &= -\int_{\mathbf{R}} Hf\ \bar{g}. \end{aligned}$$

Donc $H^* = -H$. De plus, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{H^2 f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{Hf}(\xi) = -\hat{f}(\xi).$$

Donc $H^2 = -I$. On en déduit que $H^*H = HH^* = -H^2 = I$. Donc H est un opérateur unitaire.

Partie D : transformée de Hardy et multiplicateurs de Fourier

16. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, $f \in L^2(\mathbf{R})$ quelconque. On a

$$\widehat{T_1 \circ T_2}(\hat{f}) = \widehat{T_1 \circ T_2}(f) = \widehat{T_1}\widehat{T_2(f)} = \widehat{T_1}(\widehat{T_2}\hat{f}) = \widehat{T_1} \circ \widehat{T_2}(\hat{f}).$$

Donc $\widehat{T_1 \circ T_2} = \widehat{T_1} \circ \widehat{T_2}$.

17. Soit $h \in \mathbf{R}$ quelconque. Par linéarité de l'intégrale et invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue, τ_h est clairement une application linéaire sur $L^2(\mathbf{R})$, et de plus $\|\tau_h f\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$. Donc $\tau_h : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est continue. On va proiuver que $\widehat{\tau_h} \circ \widehat{H} = \widehat{H} \circ \widehat{\tau_h}$: on montre facilement que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$, $\widehat{\tau_h} \hat{f}(\xi) = e^{ih\xi} \hat{f}(\xi)$, de sorte que

$$\widehat{\tau_h} \circ \widehat{H}(\hat{f})(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi) e^{ih\xi} \hat{f}(\xi) = \widehat{H} \circ \widehat{\tau_h}(\hat{f})(\xi).$$

Donc $\widehat{\tau_h \circ H} = \widehat{H \circ \tau_h}$, et par suite $\tau_h \circ H = H \circ \tau_h$.

18. Soit $a > 0$ quelconque. Comme à la question précédente, on commence par calculer $\widehat{\delta_a}$ et on vérifie que $\widehat{H}$ et $\widehat{\delta_a}$ commutent. On a, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$\left(\widehat{\delta_a} \hat{f}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(ax) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Donc

$$\widehat{\delta_a} \circ \widehat{H}(\hat{f})(\xi) = \frac{1}{a} \widehat{Hf}\left(\frac{\xi}{a}\right) = -\frac{i}{a} \mathrm{sgn}(\xi) \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \widehat{H} \circ \widehat{\delta_a}(\hat{f})(\xi).$$

Ainsi, on a $\widehat{\delta_a} \circ \widehat{H} = \widehat{H} \circ \widehat{\delta_a}$ et par suite, $\delta_a \circ H = H \circ \delta_a$.