3.3 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

3.3.0 Questions de cours et autres résultats classiques

Preuve du théorème A.
Posons $H = F \times G$ et contemplons l'application linéaire $u : (x, y) \mapsto x+y$ de H dans E. Son image est le sous-espace vectoriel $F+G$. Son noyau est l'image de l'application linéaire $v : x \mapsto (x, -x)$ de $F \cap G$ dans H, laquelle est injective. Le théorème A s'obtient alors en combinant l'égalité $\dim H = \dim F + \dim G$ et le théorème du rang :

$$\dim(F+G) = \dim(\operatorname{im} u) = \dim H - \dim(\ker u) = \dim H - \dim(\operatorname{im} v) = \dim H - \dim(F \cap G).$$

On peut aussi prouver le théorème A en considérant des sous-espaces vectoriels F' et G' supplémentaires de $F \cap G$ dans F et G, respectivement, et en vérifiant que l'application somme induit un isomorphisme entre $(F \cap G) \times F' \times G'$ et $F + G$.

Preuve du théorème B.
Une matrice et sa transposée ayant même déterminant, nous nous bornerons à traiter le cas de

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array}\right).$$

Soit n le nombre de lignes de A, soit k le nombre de lignes de B, et soit $\mathbb{K}$ le corps auquel les coefficients de A appartiennent. Notons $\mathbb{I}_k$ et $\mathbb{I}_{n-k}$ les matrices identités d'ordre k et $n-k$, respectivement.

La matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & C \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right)$$

a pour déterminant 1, car nous pouvons la ramener à la matrice identité en retranchant de chacune de ses $(n-k)$ dernières colonnes une combinaison linéaire judicieuse des k premières.

Soit $\Phi : \mathscr{M}_k(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'application donnée par

$$\Phi : X \mapsto \det \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right).$$

Manifestement, $\Phi(X)$ est multilinéaire alternée en les vecteurs colonnes de X, donc Φ est proportionnelle au déterminant. Le coefficient de proportionnalité est égal à $\Phi(\mathbb{I}_k) = 1$, d'où $\Phi(X) = \det X$. Nous obtenons donc que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right) = \det B.$$

On montre de la même manière que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right) = \det F.$$

Le résultat désiré s'obtient alors à partir de l'égalité

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & C \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right)$$

par multiplicativité du déterminant.

D'autres méthodes sont bien sûr possibles : on peut utiliser la formule exprimant le déterminant comme une somme alternée sur le groupe symétrique S_n et observer que les permutations $\sigma \in S_n$ contribuant effectivement à la somme stabilisent $[\![1, k]\!]$ et $[\![k+1, n]\!]$, ou bien on peut développer le déterminant selon la première colonne et raisonner par récurrence.

3.3.1 Matrices totalement positives

1.1

(a) Par définition du produit matriciel, on a

$$c_{h,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j}$$

pour tout $(h,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$. Portant notre attention sur les lignes h_1, ..., h_k et prenant $j = j_p$, cela donne

$$Y_p = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j_p} X_i$$

pour tout $p \in [\![1,k]\!]$.

(b) Substituant cette expression dans $f(Y_1,\dots,Y_k)$ et utilisant la k-linéarité de f, on obtient

$$\begin{aligned} f(Y_1,\dots,Y_k) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \quad b_{i_1,j_1}\cdots b_{i_k,j_k} \quad f(X_{i_1},\dots,X_{i_k}) \\ &= \sum_{\varphi:[\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!]} b_{\varphi(1),j_1}\cdots b_{\varphi(k),j_k} \quad f(X_{\varphi(1)},\dots,X_{\varphi(k)}), \end{aligned}$$

le lien entre les deux lignes consistant à voir une famille $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$ comme une application $\varphi : [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$. L'expression proposée dans le sujet découle directement de celle obtenue ci-dessus, compte tenu du caractère alterné de f.

(c) Chaque application injective $\varphi : [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$ s'écrit de façon unique sous la forme $\psi \circ \sigma$, où $\sigma \in S_k$ et où $\psi : [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$ est une application strictement croissante. En outre, la donnée d'une telle application ψ est équivalente à celle de son image $I = \{\psi(1),\dots,\psi(k)\}$. Concrètement, si on appelle i_1, ..., i_k les éléments de I rangés dans l'ordre croissant, alors pour tout $p \in [\![1,k]\!]$, on a $\psi(p) = i_p$ et $\varphi(p) = \psi(\sigma(p)) = i_{\sigma(p)}$.
La formule désirée se déduit de celle obtenue dans la question précédente en remplaçant la sommation sur φ par une sommation sur $(I,\sigma) \in \mathscr{P}_k(n) \times S_k$.

(d) Prenons pour f le déterminant dans la base standard de E. Alors $f(Y_1,\dots,Y_k) = \Delta_{H,J}(C)$. Prenons $I \in \mathscr{P}_k(n)$ et appelons i_1, ..., i_k les éléments de I, rangés dans l'ordre croissant. Utilisant l'antisymétrie de f, on trouve

$$f(X_{i_{\sigma(1)}},\dots,X_{i_{\sigma(k)}}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\ f(X_{i_1},\dots,X_{i_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\ \Delta_{H,I}(A).$$

La question (c) donne alors

$$f(Y_1,\dots,Y_k) = \sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A) \left(\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\ b_{i_{\sigma(1)},j_1}\cdots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \right).$$

L'expression entre parenthèses est une définition possible du mineur

$$\Delta_{I,J}(B) = \begin{vmatrix} b_{i_1,j_1} & \dots & b_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k,j_1} & \dots & b_{i_k,j_k} \end{vmatrix},$$

d'où la formule de Binet-Cauchy.

1.2

(a) Les coefficients d'une matrice sont ses mineurs d'ordre 1. Par suite, les coefficients d'une matrice TP sont positifs.

(b) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$. Notons ${}^tA$ la transposée de A. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et soit $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$. Notons i_1, ..., i_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de I (respectivement, J), rangés par ordre croissant. Alors

$$\Delta_{I,J}({}^tA) = \begin{vmatrix} a_{j_1,i_1} & \dots & a_{j_k,i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1,i_k} & \dots & a_{j_k,i_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{j_1,i_1} & \dots & a_{j_1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_k,i_1} & \dots & a_{j_k,i_k} \end{vmatrix} = \Delta_{J,I}(A),$$

puisqu'une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant. Ainsi chaque mineur de ${}^tA$ est un mineur de A. Par suite, ${}^tA$ est TP dès que A est TP.

(c) Soit un entier $n \geqslant 1$, soit $\mathbb{I}_n$ la matrice identité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, et soit $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)$. Si $I = J$, alors $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n)$ est le déterminant de la matrice identité de taille $k \times k$, donc vaut 1. Sinon, c'est que $I \not\subset J$, puisque I et J ont même cardinal ; si on écrit i_1, ..., i_k les éléments de I rangés dans l'ordre croissant, alors on peut trouver $r \in [\![1, k]\!]$ tel que $i_k \notin J$, ce qui montre que $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n)$ est nul, puisque la r-ième ligne de la matrice dont il est le déterminant est nulle. Dans les deux cas, $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(d) Soient A et B deux matrices carrées de même taille. La formule de Binet-Cauchy exprime chaque mineur de AB comme une somme de produits de mineurs de A et de B. Par suite, les mineurs de AB sont positifs dès que les mineurs de A et B le sont.

(e) On vérifie sans peine que les mineurs de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont tous égaux à 1 ou à 0 ; cette matrice est donc TP. Par contre, son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas TP, car un de ses mineurs vaut -1.

1.3

(a) Soit (H_n) la proposition : « Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathscr{C}_n$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction

$$\left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \dots + \lambda_n e^{b_n x}\right)$$

s'annule en n points distincts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. »
Certainement, (H_1) est vraie, car la fonction exponentielle ne s'annule pas. Soit $n \geqslant 2$, supposons (H_{n-1}) vraie, et prouvons (H_n).
À cette fin, prenons $(b_1, \dots, b_n) \in \mathscr{C}_n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, et supposons que la fonction

$$\left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{b_{n-1} x} + \lambda_n e^{b_n x}\right)$$

ait n zéros distincts, disons a_1, ..., a_n, ordonnés de façon croissante. En ces points, la fonction

$$f : \left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{(b_1 - b_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(b_{n-1} - b_n)x} + \lambda_n\right)$$

s'annule. Le lemme de Rolle montre alors que la dérivée f' possède un zéro dans chacun des intervalles $]a_1, a_2[$, ..., $]a_{n-1}, a_n[$, donc possède (au moins) $n - 1$ zéros distincts. Or f' est la fonction

$$\left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 (b_1 - b_n) e^{(b_1 - b_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} (b_{n-1} - b_n) e^{(b_{n-1} - b_n)x}\right).$$

Vu que $(b_1-b_n,\dots,b_{n-1}-b_n)\in\mathscr{C}_{n-1}$, nous pouvons appliquer à f' la proposition (H_{n-1}) et nous obtenons l'égalité $\lambda_i(b_i-b_n)=0$ pour chaque $i\in[\![1,n-1]\!]$. Rappelant ici que $b_1<\cdots<b_{n-1}<b_n$, cela donne $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$. Ainsi, f est la fonction constante valant identiquement λ_n ; comme elle s'annule aux points a_i, c'est que $\lambda_n=0$. Ceci achève la preuve de (H_n).

(b) Soit X un vecteur colonne tel que $EX=0$. Alors, appelant λ_1, ..., λ_n les coefficients de X, la fonction

$$\Big(\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\lambda_1e^{b_1x}+\cdots+\lambda_{n-1}e^{b_{n-1}x}+\lambda_ne^{b_nx}\Big)$$

s'annule en a_1, ..., a_n, donc en n points distincts. D'après (a), ceci implique $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$, c'est-à-dire $X=0$.

Ainsi, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par la matrice E est injectif. Il est donc bijectif (nous sommes en dimension finie), ce qui signifie que la matrice E est inversible.

(c) L'ensemble $\mathscr{C}_n$ est convexe, car intersection de demi-espaces ouverts, et non-vide. Il est donc connexe par arcs, donc connexe.

(d) Considérons l'application de $(\mathscr{C}_n)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui associe $\det E$ à $(\underline{a},\underline{b})$. D'après la question (b), cette application ne s'annule pas. De plus, elle est continue, car chaque coefficient de E est fonction continue de $(\underline{a},\underline{b})$. Enfin, son domaine de définition est connexe. Son image est donc une partie connexe de $\mathbb{R}^*$; autrement dit, cette fonction garde un signe constant.

Il nous reste à montrer que ce signe est $+$. Pour cela, un exemple suffit. Prenons ainsi $\underline{b}=(0,\dots,n-1)$. La formule du déterminant de Vandermonde donne

$$\det E=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(e^{a_j}-e^{a_i})>0.$$

1.4

(a) Soit $(A,B)\in\mathscr{G}_+\times\mathscr{G}_+^*$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\Delta_{H,J}(AB)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\Delta_{H,I}(A)\ \Delta_{I,J}(B).$$

Dans cette somme, tous les $\Delta_{I,J}(B)$ sont strictement positifs et tous les $\Delta_{H,I}(A)$ sont positifs. Par conséquent, pour montrer que $\Delta_{H,J}(AB)>0$, il suffit de montrer qu'un des $\Delta_{H,I}(A)$ est non nul.

Notons $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille $n\times n$. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\Delta_{H,H}\big(\mathbb{I}_n\big)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\Delta_{H,I}\big(A\big)\ \Delta_{I,H}\big(A^{-1}\big).$$

Comme $\Delta_{H,H}\big(\mathbb{I}_n\big)=1$, un des termes de la somme n'est pas nul. Il existe donc $I\in\mathscr{P}_k(n)$ tel que $\Delta_{H,I}(A)\neq0$, ce qui achève la preuve.

Une démonstration alternative pour la seconde partie du raisonnement consiste à observer que la matrice de taille $k\times n$ extraite de A, obtenue en conservant les lignes d'indice appartenant à H, est de rang k, et par conséquent possède un mineur non nul d'ordre k.

(b) Considérons la matrice T de l'énoncé. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$. Notons i_1, ..., i_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de I (respectivement, J), rangés par ordre croissant. En développant

$$\theta^{(i_p-j_q)^2}=\theta^{i_p^2}\times\theta^{j_q^2}\times e^{-2(\ln\theta)\,i_pj_q}$$

et en utilisant la multilinéarité du déterminant à la fois selon les lignes et selon les colonnes d'une matrice, on trouve

$$\Delta_{I,J}(T)=\begin{vmatrix}\theta^{(i_1-j_1)^2}&\dots&\theta^{(i_1-j_k)^2}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \theta^{(i_k-j_1)^2}&\dots&\theta^{(i_k-j_k)^2}\end{vmatrix}=\left(\prod_{p=1}^k\theta^{i_p^2}\right)\times\left(\prod_{q=1}^k\theta^{j_q^2}\right)\times\begin{vmatrix}e^{-2(\ln\theta)\,i_1j_1}&\dots&e^{-2(\ln\theta)\,i_1j_k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ e^{-2(\ln\theta)\,i_kj_1}&\dots&e^{-2(\ln\theta)\,i_kj_k}\end{vmatrix}.$$

Comme $-2(\ln\theta) > 0$, le déterminant à droite est de la forme étudiée dans la question 1.3 (d), et est donc strictement positif. Ainsi $\Delta_{I,J}(T) > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit (θ_n) une suite d'éléments de $]0,1[$ tendant vers zéro quand n tend vers l'infini. À partir de θ_n, formons la matrice T_n, comme dans la question (b). Chaque T_n appartient à $\mathscr{G}_+^*$, et la suite (T_n) tend vers la matrice identité quand n tend vers l'infini.

(d) Par définition, $\mathscr{G}_+$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{G}$ telles que $\Delta_{I,J}(A) \geqslant 0$ pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$. Du fait que les $\Delta_{I,J}$ sont des fonctions continues sur $\mathscr{G}$ suit alors que $\mathscr{G}_+$ est une partie fermée de $\mathscr{G}$. Ainsi, $\mathscr{G}_+$ est un fermé de $\mathscr{G}$ qui contient $\mathscr{G}_+^*$; il contient donc l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$ dans $\mathscr{G}$.

Prouvons l'inclusion opposée. Soit $A \in \mathscr{G}_+$. Considérons la suite (T_n) construite à la question (c). Chaque matrice AT_n appartient à $\mathscr{G}_+^*$, d'après la question (a), et la suite (AT_n) a pour limite A, car la multiplication des matrices est une application continue. Nous voyons ainsi que A appartient à l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$.

Les deux inclusions $\mathscr{G}_+ \supset \overline{\mathscr{G}_+^*}$ et $\mathscr{G}_+ \subset \overline{\mathscr{G}_+^*}$ prouvent l'égalité demandée.

3.3.2 Factorisation LDU d'une matrice TP inversible

2.1

(a) Décomposons A par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right),$$

avec $A_1 \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{q,n-q}(\mathbb{K})$, $A_3 \in \mathscr{M}_{n-q,q}(\mathbb{K})$, $A_4 \in \mathscr{M}_{n-q,n-q}(\mathbb{K})$. Par hypothèse, A_1 est de déterminant non nul, donc est inversible. La factorisation souhaitée est équivalente au système d'équations

$$A_1 = B, \quad A_2 = F, \quad A_3 = EB, \quad A_4 = EF + C,$$

qui admet une solution unique, à savoir

$$B = A_1, \quad C = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2, \quad E = A_3A_1^{-1}, \quad F = A_2.$$

(b) Donnons-nous $(i,j) \in [\![1, n-q]\!]^2$. Appelons P et Q les deux facteurs du produit matriciel trouvé dans la question précédente, de sorte que $A = PQ$, et écrivons la formule de Binet-Cauchy pour $H = [\![1,q]\!] \cup \{q+i\}$ et $J = [\![1,q]\!] \cup \{q+j\}$:

$$d_{i,j} = \sum_{I \in \mathscr{P}_{q+1}(n)} \Delta_{H,I}(P)\Delta_{I,J}(Q).$$

Si $I \neq H$, alors I contient un élement dans $[\![q+1,n]\!]\backslash\{q+i\}$; cela nous donne une colonne nulle dans la matrice dont $\Delta_{H,I}(P)$ est le déterminant, d'où $\Delta_{H,I}(P) = 0$. En revanche, $\Delta_{H,H}(P) = 1$, car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Il vient donc, en notant X_j la j-ième colonne de F,

$$d_{i,j} = \Delta_{H,J}(Q) = \left|\begin{array}{c|c} B & X_j \\ \hline 0 & c_{i,j} \end{array}\right| = \det(B)\, c_{i,j}.$$

Ainsi, $D = (\det B)\, C$.

(c) Par multilinéarité du déterminant, on en déduit que $\det D = (\det B)^{n-q}\ (\det C)$. La formule désirée vient alors des égalités évidentes $\det A = (\det B)\ (\det C)$ et $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) = \det B$.

(d) Deux stratégies peuvent être utilisées pour résoudre cette question : utiliser des calculs algébriques ou déduire par densité le cas général du cas établi dans la question précédente.

Utilisation de calculs algébriques.
Le cas $n = q+1$ étant banal, nous supposerons que $n > q+1$. Nous nous plaçons dans le cas qui reste à établir, à savoir $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) = 0$, et voulons établir que $\det D = 0$.
Reprenons l'écriture par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

de la question (a). Pour $(i,j) \in [\![1, n-q]\!]^2$, en développant le déterminant

$$d_{i,j} = \Delta_{[\![1,q]\!]\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]\cup\{q+j\}}(A)$$

selon la dernière colonne, nous obtenons

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+q+1}\, a_{k,q+j}\, \Delta_{([\![1,q]\!]\setminus\{k\})\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]}(A),$$

puis en développant les mineurs d'ordre q qui viennent d'apparaître, cette fois-ci selon la dernière ligne, nous obtenons

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{q} (-1)^{k+\ell+1}\, a_{k,q+j}\, a_{q+i,\ell}\, \Delta_{[\![1,q]\!]\setminus\{k\},[\![1,q]\!]\setminus\{\ell\}}(A).$$

Autrement dit, si nous introduisons la comatrice $\widetilde{A_1}$ de A_1, de taille $q \times q$, dont l'élément en position $(k,\ell) \in [\![1,q]\!]^2$ est $(-1)^{k+\ell}\Delta_{[\![1,q]\!]\setminus\{k\},[\![1,q]\!]\setminus\{\ell\}}(A)$, nous obtenons $D = -A_3\, {}^t\widetilde{A_1}\, A_2$.

Si A_1 est de rang inférieur ou égal à $q-2$, alors $\widetilde{A_1} = 0$, et donc $D = 0$. Si A_1 est de rang $q-1$, alors $\widetilde{A_1}$ est de rang 1, et donc D est de rang au plus 1. Dans les deux cas, nous avons donc $\det D = 0$, ce que nous voulions démontrer.

Déduction par densité.
La méthode la plus simple est toutefois de déduire le cas général du cas particulier démontré dans la question (c). Il s'agit de rendre précise l'idée que les deux membres de l'identité de Sylvester dépendent continûment de A et que l'inéquation $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) \neq 0$ définit un sous-ensemble dense de $\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. La difficulté de l'exercice vient du fait que le corps $\mathbb{K}$ n'est a priori pas le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Pour s'en sortir, l'astuce classique au niveau de l'agrégation consiste à plonger $\mathbb{K}$ dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ et à contempler la matrice $\widehat{A} = A - XI_n$. Le mineur $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}\big(\widehat{A}\big)$ a $(-1)^q X^q$ comme coefficient dominant, donc est non nul. D'après la question (c), l'identité de Sylvester a donc lieu pour $\widehat{A}$ dans $\mathbb{K}(X)$: elle s'écrit

$$\det \widehat{D} = \big(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}\big(\widehat{A}\big)\big)^{n-q-1}\, \big(\det \widehat{A}\big),$$

où $\widehat{D}$ est construite à partir de $\widehat{A}$ comme D l'est à partir de A. Les deux membres de cette égalité appartiennent à l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$ et peuvent donc être évalués en $X = 0$: après évaluation, on obtient l'identité de Sylvester pour A dans $\mathbb{K}$.

2.2 Soient n, q, A et D comme dans l'énoncé. Soit $k \in [\![1, n-q]\!]$, soit $(I,J) \in \mathscr{P}_k(n-q)$. Posons $I' = [\![1,q]\!] \cup \{i+q \mid i \in I\}$ et $J' = [\![1,q]\!] \cup \{j+q \mid j \in J\}$. Appliquons l'identité de Sylvester (question 2.1 (d)) à la matrice extraite de A obtenue en ne conservant que les lignes et les colonnes dont les indices appartiennent à I' et J', respectivement. On trouve

$$\Delta_{I,J}(D) = \big(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)\big)^{k-1}\, \Delta_{I',J'}(A).$$

Cette relation et la totale positivité de A entraînent que $\Delta_{I,J}(D)$ est positif.

2.3

(a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a_{1,1} = 0$. Comme A est inversible, sa première colonne et sa première ligne sont toutes deux non nulles : il existe deux indices i, j, différents de 1, tels que les coefficients $a_{i,1}$ et $a_{1,j}$ soient non nuls. Comme A est TP, ces deux coefficients sont ainsi strictement positifs (question 1.2 (a)). Utilisant à nouveau l'égalité $a_{1,1} = 0$, il vient alors $\Delta_{\{1,i\},\{1,j\}}(A) = -a_{i,1}a_{1,j} < 0$, ce qui contredit l'hypothèse que A est TP.

(b) Introduisons la matrice D de la question 2.1 pour $q = 1$. Soit $\widetilde{A}$ la matrice extraite de A obtenue en conservant les lignes et les colonnes d'indice appartenant à $\{1\} \cup [\![p+1, n]\!]$. Comme les mineurs de $\widetilde{A}$ sont des mineurs de A, la totale positivité de A entraîne celle de $\widetilde{A}$.
L'identité de Sylvester conduit à

$$\begin{aligned} \det D &= (a_{1,1})^{n-2} \ (\det A), \\ \Delta_{[\![1,p-1]\!],[\![1,p-1]\!]}(D) &= (a_{1,1})^{p-2} \ \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A), \\ \Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D) &= (a_{1,1})^{n-p-1} \ \big(\det \widetilde{A}\big). \end{aligned}$$

Appliquant $(*)$ à $\widetilde{A}$ et à D, qui sont toutes deux TP de taille strictement inférieure à n, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det \widetilde{A} &\leqslant a_{1,1} \ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A), \\ \det D &\leqslant \Delta_{[\![1,p-1]\!],[\![1,p-1]\!]}(D) \ \Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D). \end{aligned}$$

Combinant ces relations, nous parvenons à

$$(a_{1,1})^{n-2} \ (\det A) \leqslant (a_{1,1})^{n-2} \ \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) \ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A).$$

L'inégalité désirée s'obtient en simplifiant par $a_{1,1}$, qui est strictement positif.

(c) Introduisons les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et $B = PAP^{-1}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)$, le mineur $\Delta_{I,J}(B)$ de B est égal au mineur $\Delta_{I',J'}(A)$, où I' et J' sont les images de I et J par la permutation $k \mapsto n + 1 - k$ de $[\![1, n]\!]$. Du fait que A est TP suit alors que B l'est aussi. Appliquant à B le cas $p = n - 1$ de la question précédente, nous obtenons alors

$$\det B \leqslant \Delta_{[\![1,n-1]\!],[\![1,n-1]\!]}(B) \ \Delta_{\{n\},\{n\}}(B),$$

qui n'est autre que le cas $p = 1$ de $(*)$.

3.3.3 Position relative de deux drapeaux

3.1 On dresse sans peine le tableau des préimages par σ des intervalles $[\![1, i]\!]$:

i	$\sigma^{-1}([\![1, i]\!])$
1	$\{3\}$
2	$\{1, 3\}$
3	$\{1, 2, 3\}$

La définition conduit alors au tableau suivant pour $(d_{i,j}(\sigma))$:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	1	1	2
3	0	1	2	3

(Les indices i et j sont indiqués dans la première colonne et la première ligne, respectivement.)

3.2

(a) Par définition, $d_{i,j}(\sigma)$ est le nombre d'éléments $k \in [\![1,j]\!]$ tels que $\sigma(k) \in [\![1,i]\!]$. C'est donc le nombre de colonnes parmi les j premières de P_σ dont le 1 se situe dans les i premières lignes. Autrement dit, c'est le nombre de 1 dans le coin supérieur gauche de P_σ, à l'intersection des j premières colonnes et des i premières lignes. Vu que les coefficients de P_σ valent 0 ou 1, ce fait se traduit par la formule

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma).$$

(b) Supposons que $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. De la question (a), on déduit que

$$d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \left(\sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma) - \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{k,\ell}(\sigma) \right) = \sum_{k=1}^{i} p_{k,j}(\sigma),$$

$$d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i-1} \left(\sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma) - \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{k,\ell}(\sigma) \right) = \sum_{k=1}^{i-1} p_{k,j}(\sigma),$$

d'où par soustraction

$$\Big(d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma)\Big) - \Big(d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma)\Big) = p_{i,j}(\sigma),$$

comme désiré.

Supposons maintenant $i = 1$ et $j \geqslant 2$. Dans ce cas, la première égalité ci-dessus reste valable, et la somme dans le membre de droite se réduit au seul terme $p_{i,j}(\sigma)$. Comme ici $d_{i-1,j}(\sigma) = d_{i-1,j-1}(\sigma) = 0$, on a encore

$$\Big(d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma)\Big) - \Big(d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma)\Big) = p_{i,j}(\sigma).$$

Le cas $i \geqslant 2$ et $j = 1$ est symétrique du précédent, et le dernier cas $i = j = 1$ est banal.

(c) Adoptons les notations de l'énoncé. D'après la question (b), la permutation σ cherchée, si elle existe, doit vérifier

$$p_{i,j}(\sigma) = \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1}$$

pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par suite, la matrice P_σ, et donc σ elle-même, est complètement déterminée par la donnée du tableau $(\delta_{i,j})$. Ceci prouve l'unicité.

Pour montrer l'existence, étudions la matrice $P = (p_{i,j})$ formée par les coefficients

$$p_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1}.$$

La somme des coefficients dans la j-ième colonne de P est

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j} - \delta_{k-1,j}) - \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j-1} - \delta_{k-1,j-1}) = (\delta_{n,j} - \delta_{0,j}) - (\delta_{n,j-1} - \delta_{0,j-1}) = 1.$$

De même, la somme des coefficients dans chaque ligne de P vaut 1. De plus, d'après (iii), la matrice P est à coefficients dans $\{0,1\}$. Chaque ligne et chaque colonne de P contient exactement un 1 : il existe donc $\sigma \in S_n$ telle que $P = P_\sigma$.
On a alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} p_{k,\ell}(\sigma) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} \delta_{k,\ell} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j-1}} \delta_{k,\ell} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} \delta_{k,\ell} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1\\ 1\leqslant \ell\leqslant j-1}} \delta_{k,\ell}.$$

Dans le membre de droite, les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception de $\delta_{i,j}$. On obtient donc $d_{i,j}(\sigma) = \delta_{i,j}$, ce qui prouve que σ convient.

3.3 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \dots, G_n)$ deux drapeaux. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, choisissons des vecteurs $e_i \in F_i \backslash F_{i-1}$ et $f_i \in G_i \backslash G_{i-1}$. Alors pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur e_i n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$, puisque ce dernier est inclus dans F_{i-1} ; par suite, $(e_1, \dots, e_n)$ est une partie libre de E, donc est une base de E (puisque E est de dimension n). Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$ est ainsi de dimension i, et comme il est inclus dans F_i, il lui est égal. On montre de même que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E telle que pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, le sous-espace G_i soit engendré par $\{f_1, \dots, f_i\}$. Soit g l'automorphisme de E qui envoie e_i sur f_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Alors g envoie $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$.

3.4 Adoptons les notations de l'énoncé.

(a) Les deux sous-espaces $F_i \cap G_{j-1}$ et $F_{i-1} \cap G_j$ sont de dimensions $\delta_{i,j-1}$ et $\delta_{i-1,j}$, respectivement. Leur intersection est $F_{i-1} \cap G_{j-1}$, de dimension $\delta_{i-1,j-1}$. Le théorème A donne alors

$$\dim((F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)) = \delta_{i,j-1} + \delta_{i-1,j} - \delta_{i-1,j-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} &= \dim(F_i \cap G_j) - \dim((F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)) \\ &= \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right). \qquad (\natural)\end{aligned}$$

(b) Le membre de droite de $(\natural)$ est un entier positif ou nul. Il est au plus égal à 1, car

$$\dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) \leqslant \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{F_{i-1} \cap G_j}\right) = \dim\left(\frac{(F_i \cap G_j) + F_{i-1}}{F_{i-1}}\right) \leqslant \dim(F_i/F_{i-1}).$$

Par conséquent, le tableau d'entiers $(\delta_{i,j})$ vérifie la condition (iii) de la question 3.2 (c). Comme il vérifie également les conditions (i) et (ii), c'est un tableau $(d_{i,j}(\sigma))$, pour une unique permutation $\sigma \in S_n$.

3.5 On adopte les notations employées dans la question 3.4.

Supposons que (i) soit vraie. On choisit des vecteurs e_1, ..., e_n de la façon suivante. Prenons $i \in [\![1,n]\!]$ et posons $j = \sigma^{-1}(i)$. Comme

$$\dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) = p_{i,j}(\sigma) = 1,$$

le sous-espace $(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)$ est de codimension 1 dans $F_{\sigma(j)} \cap G_j$. On peut donc choisir $e_i \in F_i \cap G_j$ n'appartenant pas à ce sous-espace. Alors e_i n'appartient ni à F_{i-1}, ni à G_{j-1}.

Nous sommes alors dans une situation analogue de celle vue dans la réponse à la question 3.3 : on a un drapeau $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ et des vecteurs $e_i \in F_i \backslash F_{i-1}$; cela implique que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base telle que pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace F_i soit engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$. De même, on a un drapeau $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \dots, G_n)$ et des vecteurs $e_{\sigma(j)} \in G_j \backslash G_{j-1}$; cela implique que pour chaque $j \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace G_j soit engendré par $\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(j)}\}$. Ainsi (ii) est vraie.

Réciproquement, supposons (ii). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Un vecteur x de E appartient à F_i (respectivement, G_j) si et seulement si ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ vérifient

$$x_k \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant k \leqslant i \qquad \text{(respectivement,} \quad x_{\sigma(k)} \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant k \leqslant j).$$

Autrement dit, $F_i \cap G_j$ est engendré par les vecteurs e_k, avec k tel que $1 \leqslant k \leqslant i$ et $1 \leqslant \sigma^{-1}(k) \leqslant j$. On en déduit que

$$\dim(F_i \cap G_j) = \mathrm{Card}\big([\![1, i]\!] \cap \sigma([\![1, j]\!])\big) = \mathrm{Card}\big(\sigma^{-1}([\![1, i]\!]) \cap [\![1, j]\!]\big) = d_{i,j}(\sigma).$$

Cette relation étant valable pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a bien $(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in \mathscr{O}_\sigma$. Ainsi (i) est vraie.

3.6 L'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les couples de drapeaux conserve les dimensions des intersections $F_i \cap G_j$, donc ne change pas la permutation σ. Par conséquent, chaque $\mathscr{O}_\sigma$ est stable par l'action de $\mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire est union d'orbites. Il s'agit donc de voir que chaque $\mathscr{O}_\sigma$ est non-vide et que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{O}_\sigma$ est transitive.

Soit $\sigma \in S_n$. Utilisant l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) dans la question 3.5, on voit facilement que $\mathscr{O}_\sigma$ est non-vide. Maintenant, soient $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$ et $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$ dans $\mathscr{O}_\sigma$. Soit $(e'_1, \dots, e'_n)$ une base adaptée au couple de drapeaux $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$, comme dans l'assertion 3.5 (ii), et soit $(e''_1, \dots, e''_n)$ une base adaptée au couple de drapeaux $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$. Soit g l'automorphisme de E qui envoie e'_k sur e''_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors g envoie $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$ sur $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$. Cela établit la transitivité voulue.

3.7 On adopte les notations de l'énoncé, on prend $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}'$, et on écrit $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$, $\mathbb{F}' = (F'_0, F'_1, \dots, F'_n)$, et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \dots, G_n)$.

(a) Soit σ' la permutation telle que $(\mathbb{F}', \mathbb{G}) \in \mathscr{O}_{\sigma'}$. Les drapeaux $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}'$ ne diffèrent que par le sous-espace vectoriel de dimension k, donc pour $i \in [\![1, n]\!] \backslash \{k, k+1\}$, on a

$$p_{i,j}(\sigma) = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) = \dim\left(\frac{F'_i \cap G_j}{(F'_i \cap G_{j-1}) + (F'_{i-1} \cap G_j)}\right) = p_{i,j}(\sigma').$$

Ceci implique que $\sigma'^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] \backslash \{k, k+1\}$, d'où $\sigma' \in \{\sigma, \tau_k \circ \sigma\}$.

(b) Par contraposition, il suffit de montrer que si $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est en position σ, alors $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$.
Posons $j = \sigma^{-1}(k)$. Compte tenu de l'hypothèse $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$, on a alors

$$d_{k+1,j}(\sigma) = d_{k,j}(\sigma) = d_{k-1,j}(\sigma) + 1.$$

Comme $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ est en position σ, les $d_{i,j}(\sigma)$ indiquent les dimensions $\dim(F_i \cap G_j)$. Par conséquent, nous avons $F_{k-1} \cap G_j \subsetneq F_k \cap G_j = F_{k+1} \cap G_j$, et donc $F_{k-1} + (F_{k+1} \cap G_j) \subset F_k$. Dans cette dernière expression, le membre de gauche contient strictement F_{k-1}, car sinon on aurait $F_{k+1} \cap G_j \subset F_{k-1}$, puis $F_{k+1} \cap G_j \subset F_{k-1} \cap G_j$, ce qui est exclu. Comme F_{k-1} est un hyperplan de F_k, on a en fin de compte $F_k = F_{k-1} + (F_{k+1} \cap G_j)$.
Si $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est aussi en position σ, alors le même raisonnement amène à la conclusion que $F'_k = F'_{k-1} + (F'_{k+1} \cap G_j)$. Tenant compte des égalités $F_{k-1} = F'_{k-1}$ et $F_{k+1} = F'_{k+1}$, nous concluons que $F_k = F'_k$. Par suite, $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$, ce qu'il fallait démontrer.

3.3.4 Écritures réduites des permutations

4.1 Considérons la permutation $\sigma_0 \in S_n$ définie par $\sigma_0(i) = n+1-i$, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$. Manifestement, chaque élément (i,j) de Γ est une inversion de σ_0. Autrement dit, $I(\sigma_0) = \Gamma$, et donc $N(\sigma_0) = \text{Card } \Gamma$. C'est évidemment le maximum possible.

Inversement, si $\sigma \in S_n$ est telle que $N(\sigma) = \text{Card } \Gamma$, alors chaque élément (i,j) de Γ est une inversion de σ. Cela signifie que $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est une application décroissante, et cela impose $\sigma = \sigma_0$.

4.2

(a) Fixons-nous $(k,\sigma) \in [\![1,n-1]\!] \times S_n$. Pour chaque couple $(i,j) \in \Delta$ autre que celui formé des éléments $\sigma^{-1}(k)$ et $\sigma^{-1}(k+1)$, au moins un des deux éléments $\sigma(i)$, $\sigma(j)$ est fixé par τ_k, tandis que l'autre au pire augmente ou diminue de 1 quand on lui applique τ_k ; ainsi

$$\sigma(i) > \sigma(j) \;\Rightarrow\; \tau_k\circ\sigma(i) \geqslant \tau_k\circ\sigma(j) \qquad \text{et} \qquad \tau_k\circ\sigma(i) > \tau_k\circ\sigma(j) \;\Rightarrow\; \sigma(i) \geqslant \sigma(j),$$

et comme $\tau_k\circ\sigma(i) \neq \tau_k\circ\sigma(j)$ et $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, on a en fait

$$\sigma(i) > \sigma(j) \iff \tau_k\circ\sigma(i) > \tau_k\circ\sigma(j).$$

Autrement dit, un tel couple (i,j) appartient à $I(\sigma)$ si et seulement s'il appartient à $I(\tau_k\circ\sigma)$. Par conséquent, $I(\sigma)$ et $I(\tau_k\circ\sigma)$ ne différent que du couple formé par $\sigma^{-1}(k)$ et $\sigma^{-1}(k+1)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} I(\tau_k\circ\sigma) &= I(\sigma) \cup \big\{(\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1))\big\} \qquad \text{si } \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1), \\ I(\sigma) &= I(\tau_k\circ\sigma) \cup \big\{(\sigma^{-1}(k+1), \sigma^{-1}(k))\big\} \qquad \text{si } \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1), \end{aligned}$$

et ces unions sont disjointes. On voit ainsi que $N(\tau_k\circ\sigma) = N(\sigma)+1$ si et seulement si $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$.

(b) Dans le cadre de (a), l'élément (i,j) dont $I(\tau_k\circ\sigma)$ et $I(\sigma)$ diffèrent est formée des deux éléments de la paire $\big\{\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1)\big\}$. La permutation $\sigma^{-1}\circ\tau_k\circ\sigma$ est la transposition qui échange ces deux éléments.

4.3 L'énoncé (a) est conséquence immédiate de la première affirmation de l'énoncé (b). Montrons celle-ci en établissant par récurrence sur m la proposition (H_m) suivante : « Toute permutation $\sigma \in S_n$ telle que $N(\sigma) = m$ possède une écriture de longueur m. » La proposition (H_0) est banalement vraie, puisque la seule permutation $\sigma \in S_n$ vérifiant $N(\sigma) = 0$ est l'identité. Soit $m \geqslant 1$ et supposons (H_{m-1}) vraie. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $N(\sigma) = m$. Alors $\sigma \neq \text{id}$, donc σ^{-1} n'est pas croissante, d'où l'existence de $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1)$. D'après la question 4.2 (a), on a donc $N(\tau_k\circ\sigma) = N(\sigma)-1$. Appliquant (H_{m-1}), on trouve une écriture $(t_1,\dots,t_{m-1})$ de longueur $m-1$ de $\tau_k\circ\sigma$. Alors $(\tau_k, t_1, \dots, t_{m-1})$ est une écriture de longueur m de σ. Ceci montre (H_m).

Toujours en utilisant la question 4.2 (a), on montre par récurrence sur ℓ que pour tout mot $(t_1,\dots,t_\ell)$, on a $N(t_1\circ\cdots\circ t_\ell) \leqslant \ell$. Par suite, toute écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est de longueur supérieure ou égale à $N(\sigma)$.

4.4 La première ligne du tableau ci-dessous est la liste des élements de S_3, représentés par leurs décompositions en produit de cycles à support disjoints. La deuxième ligne donne les images de 1, 2 et 3 par la permutation. La troisième ligne indique le nombre d'inversions de la permutation. La quatrième propose une écriture réduite de la permutation.

σ	id	(1 2)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 3)
$(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$	$(1,2,3)$	$(2,1,3)$	$(1,3,2)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$N(\sigma)$	0	1	1	2	2	3
écriture	()	(τ_1)	(τ_2)	(τ_1,τ_2)	(τ_2,τ_1)	(τ_1,τ_2,τ_1)

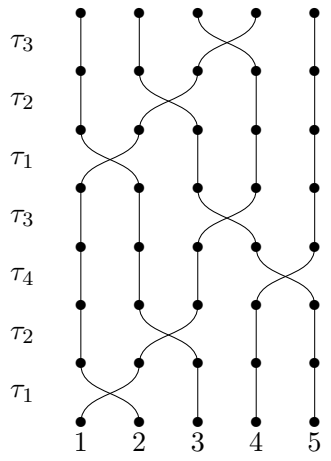
Note : le sixième élément possède une autre écriture réduite, à savoir (τ_2,τ_1,τ_2).

4.5 Adoptons les notations de l'énoncé. Pour $m \in [\![1,\ell]\!]$, posons $\pi_m = t_m \circ \cdots \circ t_\ell$; convenons en outre que $\pi_{\ell+1}$ est la permutation identité. Quand m décroît de $\ell+1$ à 1, l'ensemble $I(\pi_m)$ varie de $\varnothing$ à $I(\sigma)$, en gagnant ou en perdant un élément à chaque étape d'après la question 4.2 (a). Par hypothèse, on a $N(\sigma) < \ell$, donc $I(\sigma)$ contient strictement moins d'éléments que le nombre d'étapes : il y a donc au moins une étape où il y a eu perte d'un élément. On peut donc trouver $p \in [\![1,\ell]\!]$ et $(i,j) \in \Delta$ tels que $I(\pi_p) = I(\pi_{p+1}) \backslash \big\{(i,j)\big\}$. De plus, (i,j) appartient à $I(\pi_{p+1})$: il apparaît donc à une certaine étape dans le cheminement qui amène de $I(\pi_{\ell+1}) = \varnothing$ à $I(\pi_{p+1})$. Il existe donc $q \in [\![p+1,\ell]\!]$ tel que $I(\pi_q) = I(\pi_{q+1}) \cup \big\{(i,j)\big\}$.

D'après la question 4.2 (b), les permutations $(\pi_{p+1})^{-1} \circ t_p \circ \pi_{p+1}$ et $(\pi_{q+1})^{-1} \circ t_q \circ \pi_{q+1}$ sont toutes deux égales à la transposition qui échange i et j. Ceci nous donne $t_p \circ \pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1} = \pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1} \circ t_q$. Comme le produit de composition $\pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1}$ se simplifie en $t_{p+1} \circ \cdots \circ t_q$, cette égalité se réécrit $t_p \circ \cdots \circ t_q = t_{p+1} \circ \cdots \circ t_{q-1}$. En multipliant à gauche par $t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1}$ et à droite par $t_{q+1} \circ \cdots \circ t_\ell$, on trouve l'égalité désirée

$$\sigma = t_1 \circ \ldots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \ldots \circ t_{q-1} \circ t_{q+1} \circ \ldots \circ t_\ell.$$

Note : ce raisonnement est plus facile à comprendre à l'aide d'une représentation graphique. Plus précisément, associons un diagramme $D(m)$ à chaque mot m, comme illustré par l'exemple suivant pour $n = 5$ et $m = (\tau_3,\tau_2,\tau_1,\tau_3,\tau_4,\tau_2,\tau_1)$:



Dans cette représentation, la longueur ℓ du mot est égale au nombre total de croisements.

Du point numéroté i en bas du diagramme part une ligne que nous appelons L_i. La valeur $\sigma(i)$ se lit comme l'abscisse de l'extrémité supérieure de L_i, et les lignes L_i et L_j se coupent un nombre impair de fois si et seulement si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On voit alors que $N(\sigma)$ est le nombre de paires de lignes $\{L_i, L_j\}$ qui se coupent un nombre impair de fois. Ce nombre est bien évidemment inférieur ou égal au nombre total de croisements : la longueur d'une écriture de σ est toujours supérieure ou égale à $N(\sigma)$. S'il y a inégalité stricte, c'est que $D(m)$

comporte une paire de lignes qui se croisent au moins deux fois, disons une première fois à l'étage p et une autre fois à l'étage q. On ne change pas la permutation en supprimant ces deux croisements, opération qui revient à supprimer les deux lettres t_p et t_q du mot m.

4.6

(a) On adopte les notations de l'énoncé et de l'indication. L'écriture $(\tau_j, t_1, \dots, t_\ell)$ de $\tau_j \circ \sigma$ n'est pas réduite, car le mot m' amputé de sa première lettre est une écriture strictement plus courte de cette permutation. D'après la question 4.3, on peut obtenir une autre écriture de $\tau_j \circ \sigma$ en supprimant deux lettres dans le mot $(\tau_j, t_1, \dots, t_\ell)$. Cette opération ne peut pas concerner deux lettres du mot $(t_1, \dots, t_\ell)$, car sinon on obtiendrait une écriture de longueur $\ell - 2$ de σ, en contradiction avec l'hypothèse que $(t_1, \dots, t_\ell)$ est une écriture réduite. La première lettre τ_j est donc une des deux lettres supprimées, et l'autre est la lettre t_p, pour un certain $p \in [\![1, \ell]\!]$. On obtient ainsi $\tau_j \circ t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell$, c'est-à-dire $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = \tau_j \circ t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell$. Comme $t_1 = \tau_i \neq \tau_j$, on ne peut pas avoir $p = 1$, d'où $p \geqslant 2$. Le mot $m'' = (\tau_j, t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, \dots, t_\ell)$ est donc une écriture réduite de σ qui commence par (τ_j, τ_i).

(b) Reprenons là où nous nous étions arrêtés dans la question (a). Rebaptisons les lettres de m'' en écrivant $m'' = (t''_1, \dots, t''_\ell)$, avec donc $t''_1 = \tau_j$ et $t''_2 = \tau_i$. Appliquons à m'' et τ_i la procédure utilisée plus haut pour m et τ_j : il existe $q \in [\![2, \ell]\!]$ tel que $t''_1 \circ \cdots \circ t''_\ell = \tau_i \circ t''_1 \circ \cdots \circ t''_{q-1} \circ t''_{q+1} \circ \cdots \circ t''_\ell$. Comme $|i - j| = 1$, on a $\tau_j \circ \tau_i \neq \tau_i \circ \tau_j$, c'est-à-dire $t''_1 \circ t''_2 \neq \tau_i \circ t''_1$; ainsi $q = 2$ est impossible, d'où $q \geqslant 3$. Le mot $m''' = (\tau_i, t''_1, t''_2, \dots, t''_{q-1}, t''_{q+1}, \dots, t''_\ell)$ est donc une écriture réduite de σ qui commence par (τ_i, τ_j, τ_i).

4.7

(a) Pour $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, on vérifie sans peine que si $|i - j| \geqslant 2$, alors $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$, et que si $|i - j| = 1$, alors $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$. Par conséquent, si deux mots $m = (t_1, \dots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \dots, t'_\ell)$ vérifient $m \approx m'$, alors $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t'_1 \circ \cdots \circ t'_\ell$. Le résultat donné dans l'énoncé s'ensuit par transitivité.

(b) Considérons deux écritures réduites $m = (t_1, \dots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \dots, t'_\ell)$ d'une permutation σ. Notre but est de démontrer que $m \sim m'$.

Dans le cas où $t_1 = t'_1$, les mots $m_1 = (t_2, \dots, t_\ell)$ et $m'_1 = (t'_2, \dots, t'_\ell)$ sont des écritures réduites de $t_1 \circ \sigma$. Raisonnant par récurrence sur $N(\sigma)$, nous pouvons supposer que $m_1 \sim m'_1$ est connu. De là découle $m \sim m'$.

Nous nous focalisons désormais sur le cas $t_1 \neq t'_1$. Ecrivons $t_1 = \tau_i$ et $t'_1 = \tau_j$.

Regardons d'abord le cas $|i - j| \geqslant 2$. D'après la question 4.4 (a), il existe une écriture réduite m'' de σ de la forme $m'' = (\tau_j, \tau_i, t''_3, \dots, t''_\ell)$. Soit $m^{(4)} = (\tau_i, \tau_j, t''_3, \dots, t''_\ell)$; c'est encore une écriture réduite de σ. Comme m et $m^{(4)}$ commencent par la même lettre, nous avons $m \sim m^{(4)}$, d'après le cas traité au début du raisonnement. De même, m'' et m' commencent par la même lettre, d'où $m'' \sim m'$. Par construction enfin, $m'' \approx m^{(4)}$. Par composition, on a bien $m \sim m'$, comme désiré.

Regardons maintenant le cas $|i - j| = 1$. D'après la question 4.4 (b), il existe une écriture réduite m''' de σ de la forme $m''' = (\tau_i, \tau_j, \tau_i, t'''_4, \dots, t'''_\ell)$. Soit $m^{(5)} = (\tau_j, \tau_i, \tau_j, t'''_4, \dots, t'''_\ell)$; c'est encore une écriture réduite de σ. Comme m et m''' commencent par la même lettre, nous avons $m \sim m'''$. Comme $m^{(5)}$ et m' commencent par la même lettre, nous avons $m^{(5)} \sim m'$. Par construction enfin, $m''' \approx m^{(5)}$. Par composition, on a bien $m \sim m'$, comme désiré.

3.3.5 Décomposition de Bruhat

5.1 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. L'ensemble des valeurs propres des matrices principales extraites de A (les « coins supérieurs gauches » de A) est fini. Il existe donc une suite (λ_q) de

réels qui tend vers 0 en évitant cet ensemble. Notons $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille $n \times n$. D'après le théorème D, chaque matrice $A - \lambda_q \mathbb{I}_n$ possède une factorisation $L_q D_q U_q$, où D_q est une matrice diagonale inversible et où L_q et U_q sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure.

Posons $P_0 = P_{\sigma_0}$ pour simplifier la notation. On a alors $P_0(A - \lambda_q \mathbb{I}_n) = (P_0 L_q P_0^{-1}) P_0 (D_q U_q)$, avec $P_0 L_q P_0^{-1}$ et $D_q U_q$ triangulaires supérieures inversibles. Autrement dit $P_0(A - \lambda_q \mathbb{I}_n)$ est de la forme $b' P_0 b''$ avec $(b', b'') \in B^2$, donc appartient à $C(\sigma_0)$. Faisant tendre q vers l'infini, on voit que $P_0 A$ appartient à l'adhérence de $C(\sigma_0)$.

La multiplication à gauche par P_0 étant une bijection de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, on en déduit que toute matrice appartient à l'adhérence de $C(\sigma_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

5.2 Soit $a \in \mathbb{K}^*$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}.$$

On peut insérer ce calcul au sein de matrices de taille $n \times n$, en le plaçant au milieu de matrices diagonales par blocs de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{I}_{k-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{I}_{n-k-1} \end{array}\right),$$

où $\mathbb{I}_{k-1}$ et $\mathbb{I}_{n-k-1}$ sont des matrices identité de taille indiquée par l'indice. Après cette insertion, on obtient une expression de $y_k(a)$ sous la forme $b' P_{\tau_k} b''$.

5.3

(a) Si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ fixe $\mathbb{F}$, alors pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $g(e_k)$ doit appartenir à F_k, ce qui implique que g est triangulaire supérieure. Réciproquement, si g est inversible triangulaire supérieure, alors $g(F_k) \subset F_k$ pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, et on a même $g(F_k) = F_k$ puisque g conserve la dimension ; ainsi g fixe $\mathbb{F}$. Ceci montre que B est le stabilisateur de $\mathbb{F}$.

(b) Le résultat demandé est un cas particulier de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de la question 3.5.

(c) Soit $\sigma \in S_n$. D'après (b) et la question 3.6, $\mathscr{O}_\sigma$ est l'orbite de $(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ sous $\mathrm{GL}(E)$.
Si $g \in C(\sigma)$, alors $g = b' P_\sigma b''$ avec $(b', b'') \in B^2$, et donc $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) = (b' \cdot \mathbb{F}, b' P_\sigma \cdot \mathbb{F}) = b'(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ appartient à $\mathscr{O}_\sigma$. (On a ici utilisé que b' et b'' stabilisent $\mathbb{F}$.)
Réciproquement, supposons que $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F})$ appartienne à $\mathscr{O}_\sigma$. Alors il existe $b \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) = b(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F}) = (b \cdot \mathbb{F}, b P_\sigma \cdot \mathbb{F})$. Ceci implique que b et $g^{-1} b P_\sigma$ appartiennent à B, le stabilisateur de $\mathbb{F}$. On en déduit que $g \in C(\sigma)$.

(d) La somme disjointe $\mathrm{GL}(E) = \bigcup_{\sigma \in S_n} C(\sigma)$ s'obtient en prenant la préimage de la décomposition en orbites $\mathscr{F}^2 = \bigcup_{\sigma \in S_n} \mathscr{O}_\sigma$ par l'application $g \mapsto (\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F})$ de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathscr{F}^2$.

5.4

(a) L'hypothèse $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$ se traduit par $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$, ce qui permet d'appliquer les résultats de la question 3.7 (b).
Adoptons les notations de l'énoncé. Soit $g \in C(\sigma)$. Alors $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_\sigma$ (question 5.3 (c)), d'où $(P_{\tau_k} \cdot \mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_{\tau_k \circ \sigma}$ (question 3.7 (b)). Faisant agir P_{τ_k} sur $\mathscr{F}^2$, on en déduit que $(\mathbb{F}, P_{\tau_k}\, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_{\tau_k \circ \sigma}$ (question 3.6). Ceci signifie que $P_{\tau_k}\, g \in C(\tau_k \circ \sigma)$ (question 5.3 (c)).

(b) Soit $(g_1, g_2) \in C(\tau_k) \times C(\sigma)$. On peut écrire $g_1 = b' P_{\tau_k} b''$, avec $(b', b'') \in B^2$. Comme $C(\sigma)$ et $C(\tau_k \circ \sigma)$ sont stables par multiplication à gauche par les éléments de B, on a successivement $b'' g_2 \in C(\sigma)$, puis $P_{\tau_k}\, b'' g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$ (question (a)), et enfin $b' P_{\tau_k}\, b'' g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$. Ainsi $g_1 g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$, ce qui montre l'inclusion $C(\tau_k) C(\sigma) \subset C(\tau_k \circ \sigma)$.

Plusieurs possibilités s'offrent pour prouver l'inclusion réciproque ; l'approche que nous suivons n'est pas la plus directe. Considérons l'action de $B \times B$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définie par la règle $(b', b'') \cdot g = b'gb''^{-1}$, où $(b', b'') \in B^2$ et $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les ensembles $C(\rho)$, pour $\rho \in S_n$, sont des orbites pour cette action. (La question 5.3 (d) montre d'ailleurs que l'on obtient ainsi toutes les orbites.) L'ensemble $C(\tau_k)C(\sigma)$ est manifestement stable par cette action, donc est une union d'orbites. Comme il est non-vide et inclus dans l'orbite $C(\tau_k \circ \sigma)$, c'est qu'il lui est égal.

5.5

(a) Il s'agit de montrer que la relation binaire $\leqslant$ est réflexive, transitive et antisymétrique. Les deux premières propriétés découlent directement des définitions, la troisième provient du fait que la donnée des nombres $d_{i,j}(\sigma)$ détermine complètement σ (voir la question 3.2 (a)).

(b) Soit $\sigma \in S_n$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\sigma) = \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cap \sigma^{-1}([\![1, i]\!])\big) \leqslant \min(i, j) = d_{i,j}(\mathrm{id}),$$

ce qui montre l'inégalité $\sigma \geqslant \mathrm{id}$.

(c) Soit σ_0 la permutation définie dans la question 5.1 et soit $\rho \in S_n$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\rho) = i + j - \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cup \rho^{-1}([\![1, i]\!])\big)$$

et

$$d_{i,j}(\sigma_0) = \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cap [\![n + 1 - i, n]\!]\big) = \max(0, i + j - n),$$

d'où $d_{i,j}(\rho) \geqslant d_{i,j}(\sigma_0)$. Ceci montre l'inégalité $\rho \leqslant \sigma_0$. Celle-ci étant valable pour chaque $\rho \in S_n$, la permutation σ_0 est le plus grand élément de S_n.

5.6 On adopte les notations de l'énoncé. Avant de commencer les preuves des deux propriétés, il est utile d'observer que si $i \neq k$, alors $(\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, i]\!]) = \rho^{-1}([\![1, i]\!])$, d'où $d_{i,j}(\rho) = d_{i,j}(\tau_k \circ \rho)$. De même, si $i \neq k$, alors $d_{i,j}(\sigma) = d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$.

(a) Nous voulons établir que $d_{i,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$ pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $i \neq k$, cela provient de l'hypothèse $\rho \leqslant \sigma$ et des égalités données dans notre observation liminaire. Focalisons-nous donc sur le cas $i = k$ et distinguons deux sous-cas :

– Si $j \geqslant (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k)$, alors

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k]\!]) = \big([\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k-1]\!])\big) \cup \big\{(\tau_k \circ \rho)^{-1}(k)\big\},$$

d'où $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k-1,j}(\tau_k \circ \rho) + 1$. L'inclusion

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k]\!]) \subset \big([\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k-1]\!])\big) \cup \big\{(\tau_k \circ \sigma)^{-1}(k)\big\}$$

conduit pour sa part à $d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma) \leqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1$. On obtient ainsi

$$d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k-1,j}(\tau_k \circ \rho) + 1 \geqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1 \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

– Si $j < (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k+1)$, alors

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k]\!]) = [\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k+1]\!]),$$

d'où $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k+1,j}(\tau_k \circ \rho)$. L'inclusion

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k]\!]) \subset [\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k+1]\!])$$

conduit à $d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma) \leqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma)$, et donc en fin de compte

$$d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k+1,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

Les deux sous-cas épuisent toutes les possibilités, puisque $(\tau_k \circ \rho)^{-1}(k) < (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k+1)$ (voir la question 4.2 (a)). L'inégalité désirée $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma)$ est donc toujours satisfaite.

(b) Le raisonnement est semblable à celui utilisé dans la question (a). Nous voulons établir que $d_{i,j}(\rho) \geqslant d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$ pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i \neq k$, cela provient de l'hypothèse $\rho \leqslant \sigma$ et de la seconde égalité donnée dans notre observation liminaire. Focalisons-nous donc sur le cas $i = k$ et distinguons deux sous-cas :
– Si $j \geqslant \rho^{-1}(k)$, alors

$$d_{k,j}(\rho) = d_{k-1,j}(\rho) + 1 \geqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1 \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

– Si $j < \rho^{-1}(k+1)$, alors

$$d_{k,j}(\rho) = d_{k+1,j}(\rho) \geqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

Les deux sous-cas épuisent toutes les possibilités, puisque $\rho^{-1}(k) < \rho^{-1}(k+1)$.

5.7 Adoptons les notations de l'énoncé. Dans $\widehat{E}$, choisissons des supplémentaires F' et G' de F et G, respectivement. Choisissons des bases de $\widehat{E}$ adaptées à ces décompositions. Un élément $g \in \mathrm{GL}(\widehat{E})$ est alors représenté par une matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

où A est la matrice d'une application linéaire de G dans F et C est la matrice d'une application linéaire de G dans F'. Le théorème du rang dit alors que le rang de C est

$$\mathrm{rg}(C) = \dim G - \dim\bigl(G \cap g^{-1}(F)\bigr) = \dim G - \dim\bigl(F \cap g(G)\bigr).$$

La condition $\dim\bigl(F \cap g(G)\bigr) \geqslant d$ est donc équivalente à la demande que $\mathrm{rg}(C) \leqslant \dim G - d$. Cette inégalité se traduit par l'annulation simultanée d'un ensemble de mineurs de C, ce qui définit bien un fermé.

5.8 On montre (i) $\Rightarrow$ (ii) en raisonnant par récurrence sur $N(\sigma)$. La question 5.5 (b) permet d'initialisation la récurrence. Ceci fait, considérons deux permutations ρ et σ telles que $\sigma \neq \mathrm{id}$ et $\rho \leqslant \sigma$, et prenons une écriture réduite $(t_1, \dots, t_\ell)$ de σ. Appelons $k \in [\![1, n-1]\!]$ l'indice tel que $t_1 = \tau_k$. De deux choses l'une :
– Soit $N(\tau_k \circ \rho) < N(\rho)$. Dans ce cas, on a $\tau_k \circ \rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$ (question 5.6). Comme $N(\tau_k \circ \sigma) < N(\sigma)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : (ii) est vraie pour $\tau_k \circ \rho$ et $\tau_k \circ \sigma$. De l'écriture réduite $(t_2, \dots, t_\ell)$ de $\tau_k \circ \sigma$, on peut donc extraire une écriture réduite de $\tau_k \circ \rho$. En y ajoutant la première lettre $t_1 = \tau_k$, on obtient une écriture réduite de ρ.
– Soit $N(\tau_k \circ \rho) > N(\rho)$. Dans ce cas, on a $\rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$ (question 5.6), et en raisonnant comme dans le premier cas, on extrait de $(t_2, \dots, t_\ell)$ une écriture réduite de ρ.

Dans les deux cas, on a su extraire de $(t_1, \dots, t_\ell)$ une écriture réduite de ρ ; autrement dit, on a montré (ii).

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est banale.

Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soient deux permutations ρ et σ, et soit $(t_1, \dots, t_\ell)$ une écriture réduite de σ et $(i_1, \dots, i_k)$ une suite strictement croissante d'éléments de $[\![1, \ell]\!]$ tels que $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ. D'après l'égalité (†), on a alors $C(\sigma) = C(t_1) \cdots C(t_\ell)$, et par continuité du produit, il vient $\overline{C(\sigma)} \supset \overline{C(t_1)} \cdots \overline{C(t_\ell)}$. Par ailleurs, on déduit de la question 5.2 que la matrice identité appartient à $\overline{C(t)}$ pour n'importe quelle lettre $t \in T$. Par conséquent, $\overline{C(\sigma)} \supset C(t_{i_1}) \cdots C(t_{i_\ell}) = C(\rho)$, ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à montrer l'implication (iv) ⇒ (i). Soit $\mathbb{F} = (F_0, \dots, F_n)$ le drapeau standard de $\mathbb{R}^n$. D'après les questions 3.4 et 5.3 (c), un élément $g \in \mathrm{GL}(E)$ appartient à une double classe $C(\sigma)$ si et seulement si

$$d_{i,j}(\sigma) = \dim\bigl(F_i \cap g(F_j)\bigr)$$

pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Soient maintenant deux permutations ρ et σ telles que $C(\rho) \subset \overline{C(\sigma)}$. L'ensemble

$$\bigl\{g \in \mathrm{GL}(E) \bigm| \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ \dim\bigl(F_i \cap g(F_j)\bigr) \geqslant d_{i,j}(\sigma)\bigr\}$$

contient $C(\sigma)$ d'après ce qui précède et est fermé d'après la question 5.7, donc contient $C(\rho)$. Prenons donc $g \in C(\rho)$. Alors pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\rho) = \dim\bigl(F_i \cap g(F_j)\bigr) \geqslant d_{i,j}(\sigma),$$

d'où $\rho \leqslant \sigma$, comme désiré.

5.9 Dans la réponse à la question 5.4 (b), nous avons observé que les ensembles $C(\rho)$ étaient les orbites pour l'action de $B \times B$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in S_n$. Alors $C(\sigma)$ est stable par cette action de $B \times B$. Comme cette action est continue, l'adhérence $\overline{C(\sigma)}$ est également stable par l'action de $B \times B$, donc est une union d'orbites $C(\rho)$. La question 5.8 précise quelles sont les permutations ρ concernées : $C(\rho)$ est inclus dans $\overline{C(\sigma)}$ si et seulement si $\rho \leqslant \sigma$.

3.3.6 Matrices unitriangulaires totalement positives

6.1

(a) Considérons l'application

$$\psi : \Bigl(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto ab\Bigr).$$

Elle est de classe C^∞, donc son graphe est une sous-variété de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\bigl\{(a,b,ab) \bigm| (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\bigr\}$$

est un ouvert de cette sous-variété ; c'est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
Grâce au difféomorphisme

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix},$$

on peut identifier $\mathbb{R}^3$ avec le sous-espace affine de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices unitriangulaires inférieures. Dans cette identification, l'image de $Y(m)$ est précisément notre sous-variété.

(b) Les mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$$

sont 0, 1, x, y, z, $xy - z$. Si l'on identifie l'ensemble des matrices unitriangulaires inférieures de taille 3×3 avec $\mathbb{R}^3$, ainsi que l'avons fait dans la question (a), alors l'ensemble des matrices TP correspond au cône défini par les équations

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant xy. \tag{‡}$$

Dans cette identification, les images des différentes applications $Y(m)$ sont données dans le tableau suivant.

m	image de $Y(m)$
$()$	$x=0, \quad y=0, \quad z=0$
(τ_1)	$x>0, \quad y=0, \quad z=0$
(τ_2)	$x=0, \quad y>0, \quad z=0$
(τ_1,τ_2)	$x>0, \quad y>0, \quad z=0$
(τ_2,τ_1)	$x>0, \quad y>0, \quad z=xy$
(τ_1,τ_2,τ_1)	$x>0, \quad y>0, \quad 0<z<xy$

On vérifie alors sans peine que les images des $Y(m)$ sont deux à deux disjointes et que leur union est l'ensemble des triplets vérifiant (‡).

6.2

(a) Cela résulte d'un calcul banal avec des matrices diagonales par blocs.

(b) Les matrices sont diagonales par blocs, le bloc central étant de taille 3×3 et formé des lignes d'indice appartenant à $\{i,j,i+1,j+1\}$, et les deux blocs extérieurs étant des matrices identité. Il suffit donc de se focaliser sur le bloc central, c'est-à-dire de faire le calcul pour $n=3$ et $\{i,j\}=\{1,2\}$. Le calcul est élémentaire et conduit à

$$(a',b',c')=\left(\frac{bc}{a+c},\ a+c,\ \frac{ab}{a+c}\right),$$

que ce soit pour $(i,j)=(1,2)$ ou $(i,j)=(2,1)$. Il est dès lors naturel de s'attendre à ce que l'application $(a,b,c)\mapsto(a',b',c')$ de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans lui-même soit involutive, donc bijective. De fait, cela se vérifie par un calcul direct.

6.3

(a) Soient σ, k, a et g comme dans l'énoncé, et soit $m=(t_1,\dots,t_\ell)$ une écriture réduite de σ.
Supposons d'abord que $N(\tau_k\circ\sigma)>N(\sigma)$. Alors le mot $m'=(\tau_k,t_1,\dots,t_\ell)$ est une écriture réduite de $\tau_k\circ\sigma$, et comme g appartient à l'image de $Y(m)$, le produit $y_k(a)g$ appartient à l'image de $Y(m')$, c'est-à-dire à $W(\tau_k\circ\sigma)$.
Dans le cas contraire, $m'=(\tau_k,t_1,\dots,t_\ell)$ est une écriture non réduite de $\tau_k\circ\sigma$, donc il existe $p\in[\![1,\ell]\!]$ tel que $\tau_k\circ\sigma=t_1\circ\cdots\circ t_{p-1}\circ t_{p+1}\circ\cdots\circ t_\ell$ (question 4.5). Alors le mot $m''=(\tau_k,t_1,\dots,t_{p-1},t_{p+1},\dots,t_\ell)$ est une écriture réduite de σ, ce qui permet d'écrire g sous la forme $Y(m'')(b_1,\dots,b_\ell)$, avec $(b_1,\dots,b_\ell)\in(\mathbb{R}_+^*)^\ell$. On voit ainsi que $y_k(a)g=Y(m'')(a+b_1,b_2,\dots,b_\ell)$ appartient à l'image de $Y(m'')$, c'est-à-dire à $W(\sigma)$.

(b) Soient $(a_1,\dots,a_\ell)$ et $(b_1,\dots,b_\ell)$ deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^\ell$ qui ont même image par $Y(m)$. Nous voulons montrer que $(a_1,\dots,a_\ell)=(b_1,\dots,b_\ell)$.
On raisonne par récurrence sur $N(\sigma)$. Ecrivons $m=(t_1,\dots,t_\ell)$. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $t_1=\tau_k$. Posons $m'=(t_2,\dots,t_\ell)$; c'est une écriture réduite de $\tau_k\circ\sigma$. Supposons un instant que l'on ait $a_1>b_1$; on pourrait alors écrire

$$Y(m)(a_1-b_1,a_2,\dots,a_\ell)=y_k(-b_1)\,Y(m)(a_1,\dots,a_\ell)=Y(m')(b_2,\dots,b_\ell),$$

ce qui contredirait le fait, affirmé dans l'énoncé, que les ensembles $W(\sigma)$ et $W(\tau_k\circ\sigma)$ sont disjoints. Par symétrie, le cas $b_1>a_1$ n'est pas non plus possible. On a donc $a_1=b_1$. Après simplification, on observe que $(a_2,\dots,a_\ell)$ et $(b_2,\dots,b_\ell)$ ont même image par $Y(m')$. L'hypothèse de récurrence donne alors $(a_2,\dots,a_\ell)=(b_2,\dots,b_\ell)$, ce qui conclut la preuve.

6.4

(a) Soit $\sigma \in S_n$ et soit $m = (t_1, \dots, t_\ell)$ une écriture réduite de σ.

Soit $\rho \in S_n$ une permutation plus petite que σ. D'après la question 5.8, il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telle que $m' = (t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ. Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, construisons un $\underline{b} \in (\mathbb{R}_+^*)^\ell$ en mettant a_r en position i_r, pour $r \in [\![1, k]\!]$, et en mettant ε aux autres endroits. Alors $Y(m)(\underline{b})$ appartient à $W(\sigma)$ et tend vers $Y(m')(\underline{a})$ quand ε tend vers 0. Ce dernier appartient donc à l'adhérence de $W(\sigma)$. Ceci étant valable pour tout $\underline{a} \in (\mathbb{R}_+^*)^k$, on a $W(\rho) \subset \overline{W(\sigma)}$.

Dans l'autre sens, soit h un élément de $\overline{W(\sigma)}$. Cet élément est la limite d'une suite (g_p) d'éléments de $W(\sigma)$. Écrivons $g_p = Y(m)(b_{p,1}, \dots, b_{p,\ell})$, avec $b_{p,r} \in \mathbb{R}_+^*$ pour chaque $p \geqslant 0$ et chaque $r \in [\![1, \ell]\!]$. La somme $b_{p,1} + \cdots + b_{p,\ell}$ est égale à la somme des coefficients sur la sous-diagonale de la matrice g_p, donc admet une limite quand p tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(b_{p,1}, \dots, b_{p,\ell})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$, est bornée. Quitte à extraire, on peut la supposer convergente et appeler $(c_1, \dots, c_\ell)$ sa limite. Supprimant les zéros dans cette liste, on voit qu'il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telle que $h = Y(m')(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$, où $m' = (t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$. Du résultat de la question 6.3 (a), appliqué de façon répétée, on déduit alors que $h \in W(\rho)$, où ρ s'écrit comme un produit de certaines des lettres du mot m'. La question 5.8 assure que $\rho \leqslant \sigma$, de sorte qu'on a

$$h \in \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leqslant \sigma}} W(\rho),$$

comme désiré.

(b) Appelons V l'union $\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$. Chaque élément de V est produit de matrices $y_k(a)$, pour $(k, a) \in [\![1, n-1]\!] \times \mathbb{R}_+^*$. La stabilité de V par multiplication découle ainsi de la question 6.3 (a). (Incidemment, puisque V contient toutes les matrices $y_k(a)$ ainsi que la matrice identité, on voit que V est l'ensemble de tous les produits de matrices $y_k(a)$.)

Soit σ_0 la permutation définie dans la question 5.1. D'après la question 5.5 (c), σ_0 est le plus grand élement de S_n pour l'ordre $\leqslant$. D'après la question (a), V est l'union des adhérences dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des $W(\sigma)$, pour $\sigma \in S_n$, donc est une union finie de fermés, donc est fermé.