

### 1. Questions de cours

- (a) Critère des séries alternées
- (b)  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable
- (c) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

### 2. Quelques études

Etudier la nature des séries de terme général suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} [(n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}] \text{ (suivant } \alpha).$$

$$u_n = \frac{\lambda^n}{n!} (l+n)^n \text{ pour } l > 0, \lambda < 1/e.$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$u_n = \frac{2^n}{C_{2n}^n}.$$

3. Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant :

$$u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}], \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Etudier la convergence de  $(u_n)$ , et en donner un équivalent asymptotique à deux termes.

- 4. Soit  $(u_n)$  une suite décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux  $u_n$  et  $n(u_n - u_{n+1})$  sont de même nature. Comparer leur somme dans le cas de la convergence.
- 5. Soit  $\sum u_n$  une série réelle positive,  $u_0 > 0$ . Etudier les séries  $\sum v_n$  et  $\sum w_n$  où :

$$v_n = \frac{u_n}{s_n}, \quad w_n = \frac{u_n}{(s_n)^\alpha}, \quad \text{avec } s_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

### 6. Sommation par paquets

(a) Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction strictement croissante. On définit :

$$v_n = \sum_{i=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_i, \quad l_n = \sum_{i=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} |u_i|.$$

Montrer que : si  $\sum v_n$  converge, et  $l_n \rightarrow 0$ , alors  $\sum u_n$  converge, et  $\sum u_n = \sum v_n$ .

(b) Application. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

- 7. Soit  $\sum u_n$  une série réelle semi-convergente (ie convergente sans être absolument convergente). Soit  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Montrer qu'il existe une permutation  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sum u_{\varphi(n)}$  converge vers  $l$ .
- 8. (a) Discuter en fonction du paramètre  $\alpha > 0$  la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ , où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

(b) Discuter en fonction des réels  $\theta, \varphi$  la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$ , où :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{ni\varphi}}.$$

- 9. Faire un développement asymptotique à l'ordre 3 des nombres harmoniques  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .