1. **Questions de cours**
   (a) Théorème de décomposition des noyaux
   (b) Théorème de Cayley-Hamilton
   (c) Montrer que f diagonalisable ssi f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
2. **Endomorphismes trigonalisables qui commutent** Soit E un K-ev,(f_i) une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux.
   (a) Montrer que les (f_i) ont un vecteur propre commun.
   (b) Montrer que les (f_i) sont simultanément trigonalisables.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A = 0$. Montrer que ou A est nulle, ou A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. **Déterminant circulant**
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,$deg(P) < n$. Calculer $P(J)$.
   (b) En déduire une diagonalisation de J.
   (c) Calculer le déterminant circulant suivant : $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix}$.
5. **Espace vectoriel cyclique**
   Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathfrak{L}(E)$ admettant un polynôme minimal Π_f. Pour tout $x \in E$, on note :
   - P_x le polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ de plus bas degré tel que $P_x(f)(x) = 0$.
   - $E_x = \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

   (a) i. Montrer que P_x existe et est unique, et que si $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P(f)(x) = 0$, alors $P_x | P$.
   ii. Montrer que E_x est un sev de dimension $deg(P_x)$.
   (b) i. Si $E_x \cap E_y = \{0\}$, montrer que $P_{x+y} = ppcm(P_x, P_y)$. Généraliser à p vecteurs.
   ii. Si P_x et P_y sont premiers entre eux, montrer $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser à p vecteurs.
   (c) i. Soit $M \in \mathbb{K}[X]$ un facteur irrédctible de Π_f, α sa multiplicité dans la décomposition de Π_f en facteurs irréductibles. Montrer qu'il existe $x \in Ker\ M^\alpha(f)$ tel que $P_x = M^\alpha$.
   ii. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.

6. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Si $u,v \in \mathfrak{L}(E)$, on note $L_u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$ l'endomorphisme défini sur $\mathfrak{L}(E)$ par $L_u(f) = u \circ f$, et on note $R_v \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$ celui défini par $R_v(f) = f \circ v$.
   (a) Calculer $dim(Ker(L_u))$ et $dim(KerR_v)$ en fonction de $dim(Ker\ u)$ et $dim(Ker\ v)$.
   (b) Montrer que u (resp v) est diagonalisable ssi L_u (resp R_v) l'est.
   (c) Donner les matrices de L_u et R_v dans des bases commodes.
   (d) On note $A_{u,v} = L_u - R_v$. Montrer que si u et v sont diagonalisables, alors $A_{u,v}$ l'est aussi.
7. Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$ avec $rg(f) = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
8. Soit la décomposition $E = E' \oplus E''$. Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que on ait : $Mat(f) = \left(\begin{array}{c|c} Mat(f') & Mat(g) \\ \hline 0 & Mat(f'') \end{array}\right)$. On suppose en outre que les polynômes caractéristiques $P_{f'}$ et $P_{f''}$ sont premiers entre eux et scindés. Montrer que f est diagonalisable ssi f' et f'' le sont.