

1. Questions de cours

- (a) Donner la signature de la forme quadratique : $xy + xz + xt + yz + yt + zt$.
- (b) Existence de bases orthonormales en dimension finie
- (c) Meilleure approximation par un vecteur de F
- (d) Orthonormalisation de Schmidt
- (e) Réduction des endomorphismes auto-adjoints, orthogonaux...

2. Décomposition polaire et applications

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles respectifs des matrices symétriques, symétriques positives et symétriques définies positives.

- (a) Existence de la décomposition polaire
 - i. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer : $\exists! S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), M = S^2$.
 - ii. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\exists!(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), M = OS$. Le couple (O, S) s'appelle la *décomposition polaire* de M .
- (b) Topologie de la décomposition polaire
 - i. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - ii. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - iii. En déduire que l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

- iv. Montrer en utilisant i et ii que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est plus forcément inversible, elle admet toujours une décomposition polaire, la matrice symétrique étant cette fois choisie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (c) Application 1 : Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ (ie si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ compact avec $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$, on a $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $G = GL_n(\mathbb{R})$).
- (d) Application 2 : Points extrémaux de la boule unité des endomorphismes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme matricielle associée à la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n . On note : $\phi = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|A\| \leq 1 \text{ et } \forall B, C \text{ avec } \|B\| \leq 1 \text{ et } \|C\| \leq 1, A = \frac{B+C}{2} \implies B = C = A\}$. ϕ est l'ensemble des points extrémaux de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|A\| \leq 1\}$.
 - i. Montrer que $A \in \phi \implies \|A\| = 1$.
 - ii. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \phi$.

3. Inégalité d'Hadamard

Soient X_1, \dots, X_n des vecteurs de \mathbb{C}^n , muni de la norme hermitienne canonique. On appelle M la matrice dont les vecteurs colonnes sont les X_i . Montrer que : $|\det(M)| \leq \|X_1\| \dots \|X_n\|$.

4. Calculer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin(x) - (ax^2 + bx))^2 dx$.

5. Quelques formes quadratiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que les applications suivantes sont des formes quadratiques et calculer leur signature :

- (a) $A \mapsto (\text{tr} A)^2$
- (b) $A \mapsto \text{tr}({}^t A A)$
- (c) $A \mapsto (\text{tr} A^2)$
- (d) $A \mapsto \text{tr}(S A {}^t A)$, où $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique fixée.

6. Soit E un espace hermitien, et f et g deux automorphismes autoadjoints de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg = gf$. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une base commune de vecteurs propres orthonormés.

7. Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que f est trigonalisable dans une base orthonormée de E .
 - Si f et g commutent, montrer qu'il existe une base orthonormée de E trigonalisant à la fois f et g .
8. **Caractérisation des matrices positives**
 Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
- Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Montrer que M est définie positive si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\det(M_k) > 0$.
 - Pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $M_I = (a_{(i,j) \in I^2})$. Montrer que M est une matrice positive si et seulement si pour tout I , $\det(M_I) \geq 0$.
9. Soit A et B deux matrices symétriques positives réelles de taille n .
- Montrer que $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$. Etudier les cas d'égalité.
 - Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq (\text{Tr}(A))/n$.
 - Montrer que $(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leq (\det(A+B))^{1/n}$.
10. **Egalité de Courant-Fischer**
 Soit A une matrice hermitienne, de vps $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. On note $V_k = \{W \text{ sev de } \mathbb{C}^n \mid \dim W = k\}$.
- Montrer que : $\lambda_k = \min_{W \in V_k} \max_{v \in W - \{0\}} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$.
 - Soit $B = A + R$ une autre matrice hermitienne, de vps $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$. Montrer que $|\lambda_k - \mu_k| \leq \|R\|_2$.
11. Soient A_1 et A_2 deux matrices symétriques réelles, positives, q_1 et q_2 les formes quadratiques associées dans la base canonique de \mathbb{R}^n . On suppose que $\forall X \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$. Montrer que : $\det(A_1) \leq \det(A_2)$.