1. **Questions de cours**
   (a) L'existence de dérivées partielles continues en un point implique l'existence de la différentielle en ce point.
   (b) Énoncé du théorème des fonctions implicites et interprétation géométrique.
   (c) Théorème de Schwarz
2. **Différentielle de l'inversion**
   On note $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. Prouver qu'il s'agit d'un ouvert. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est différentiable, et calculer la différentielle.
3. **Différentielle du déterminant**
   Montrer que l'application définie par $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad M \mapsto \det M$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.
4. **Recherche d'extrema**
   Etudier les extrema relatifs, puis les extrema absolus de la fonction :
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.
5. **Principe du maximum**
   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le *laplacien* de f par $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. On note D la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{D}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Si $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in D$, montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$.
   (b) Si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ (on dit alors que f est *harmonique*), montrer que :
   $$\forall x \in D,\ \min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y).$$
6. **Théorème de Rolle**
   On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable constante sur S. Montrer l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < 1$, tel que $df_{x_0} = 0$.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'application $\phi = f - Id_{\mathbb{R}^n}$ est k-contractante. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
8. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que $x \mapsto N^2(x)$ soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N est une norme euclidienne.
9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq k < 1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = (x - f(y), y - f(x))$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
10. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \sin y + xy^4 + x^2$.
    (a) Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction : $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x,y) = 0$.
    (b) Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.