

1. **Hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**

- (a) Soit $f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^*$. Montrer : $\exists A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) / \forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = \text{Tr}(AX)$.
- (b) Montrer que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

2. **Résultant**

- (a) Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que P et Q ont un facteur commun non constant ssi

$$\exists A, B \in \mathbb{C}[X], A \neq 0, B \neq 0 / AP = BQ \text{ et } \deg(A) < \deg(Q), \deg(B) < \deg(P).$$

- (b) Caractériser le fait que P et Q soient premiers entre eux par la non-nullité d'un déterminant (qui s'écrit en fonction des coefficients de ce polynôme). Ce déterminant s'appelle le résultant de P et Q .

3. **Autour de la comatrice**

- (a) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note \tilde{A} sa comatrice. Donner le rang de \tilde{A} en fonction du rang de A .
- (b) Pour $n \geq 3$, résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $A = \tilde{A}$.

4. **Morphisme de groupes**

Soit \mathbb{K} un corps infini. soit $\phi : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ un morphisme de groupes, $\phi(M)$ étant un polynôme des coefficients de M . Montrer que ϕ est une puissance du déterminant.

5. **Un système linéaire**

On se donne $4n$ réels x_1, \dots, x_{4n} que l'on dispose dans le tableau suivant :

	x_1	\dots	x_n	
x_{4n}	$a_{1,1}$	\dots	$a_{1,n}$	x_{n+1}
\vdots		$a_{i,j}$		\vdots
x_{3n+1}	$a_{n,1}$	\dots	$a_{n,n}$	x_{2n}
	x_{3n}	\dots	x_{2n+1}	

On cherche à compléter le tableau en donnant des valeurs aux $a_{i,j}$ de sorte que chaque case non au bord du tableau soit la moyenne arithmétique des 4 cases adjacentes. Par exemple :

$$a_{2,2} = \frac{1}{4}(a_{1,2} + a_{3,2} + a_{2,1} + a_{2,3})$$

et

$$a_{1,1} = \frac{1}{4}(x_1 + x_{4n} + a_{2,1} + a_{1,2})$$

- (a) Montrer qu'il existe un unique choix des $a_{i,j}$.
- (b) On définit une suite de matrices carrées $n * n$ par : $A_0 = (0)$, et la formule de récurrence : $(A_{n+1})_{i,j} = \frac{1}{4}((A_n)_{i,j+1} + (A_n)_{i,j-1} + (A_n)_{i+1,j} + (A_n)_{i-1,j})$, avec les conventions : $(A_n)_{0,j} = x_j, \text{etc...}$
 On suppose en outre tous les x_i positifs. Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{i,j})$.