

1. **Questions de cours**

- (a) Théorème de Dirichlet
- (b) Théorème de Parseval
- (c) Série trigo qui converge normalement

2. **Calcul de sommes**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique égale à $1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f . En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

3. **Séries de Fourier et équations différentielles**

On désigne par S la somme de la série de fonctions $u_n(x) = (-1)^n \frac{\cos(nx)}{(n^2 + a^2)n^2}$. Montrer que S est \mathcal{C}^2 et vérifie sur $[-\pi, \pi]$:

$$S''(x) - a^2 S(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$$

En déduire la valeur de S .

4. **Quelques exercices en vrac**

- (a) Montrer de 2 façons différentes que si f est \mathcal{C}^1 2π -périodique, ses coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini.
- (b) Si en outre f est \mathcal{C}^∞ , montrer que ses coefficients de Fourier sont à décroissance rapide (ie $\forall p \geq 0, c_n(f) = o(\frac{1}{n^p})$).
- (c) On suppose que f est \mathcal{C}^1 et $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que : $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.

5. **D'après Capes 97**

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère la fonction 2π -périodique f tel que, $t \in]-\pi, \pi] \implies f(t) = ch(xt)$.

- (a) Montrer que f est paire, continue et \mathcal{C}^1 par morceaux.
- (b) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- (c) Justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. En écrivant cette égalité pour $t = \pi$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\pi \coth(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$$

- (d) On rappelle que $\forall N \in \mathbb{N}, \forall X \neq -1$, on a : $\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^N (-1)^k X^k + (-1)^{N+1} \frac{X^{N+1}}{1+X}$. En appliquant

ceci aux quantités $\frac{2x}{x^2 + n^2} = \frac{2x}{n^2} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}$, montrer qu'au voisinage épointé de 0, on a :

$$\pi \coth(\pi x) - \frac{1}{x} = 2 \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} S_{2i-1} x^{2i-1} + O(x^{2p+1}), \text{ où } S_\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$$

- 6. On appelle E l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , f fixé dans E , et Ω l'application définie sur E par :

$$\forall g \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \Omega(g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Montrer que Ω est un endomorphisme de E et déterminer son spectre ainsi que ses sous-espaces propres.

7. Holomorphie implique analyticité

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{C} . Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction \mathbb{C} -dérivable (ie $\forall z_0 \in \Omega, f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe), et on suppose en outre que la fonction f' est continue. Soit $a \in \Omega$, on note δ_a la distance de a à $\mathbb{C} - \Omega$. Soit $r \in]0, \delta_a[$. On introduit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \theta \mapsto f(a + re^{i\theta})$.

(a) Calculer les coefficients de ϕ_r .

(b) En déduire l'existence d'une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \forall z \in D(a, \delta_a), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$

8. Théorème de Bernstein sur les séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. On suppose que :

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \exists C > 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |f(u) - f(v)| \leq C|u - v|^\alpha$$

(une telle fonction est dite α -hölderienne).

(a) Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx$.

(b) On pose $\rho_n = (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)^{1/2}$. Prouver la majoration :

$$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \sum_{2^{\nu-1} < n \leq 2^\nu} \rho_n \leq \frac{C}{2} \frac{\pi^\alpha}{2^{\nu(\alpha-1/2)}}.$$

(c) Si $\alpha > 1/2$, montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

9. Formule sommatoire de Poisson

(a) Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et continue. On définit sa transformée de Fourier par :

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt. \text{ On suppose que :}$$

i. $\exists M > 0, \exists \alpha > 1 / \forall x \in \mathbb{R} |F(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

ii. $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{F}(2\pi n)$

Montrer qu'on a alors la relation : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(2\pi n)$.

(b) On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$. Calculer, pour $z \in \mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-zx} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{z^2/4}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0, q = e^{-\varepsilon}, \theta \in \mathbb{R}$. On pose $S(q, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n \theta}$. Montrer que :

$$S(q, \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}(n - \theta)^2\right).$$

(d) Application probabiliste : On considère un dé pipé, la probabilité d'apparition de la face 1 étant $1 - q$. On considère deux joueurs A et B, A lance le dé une fois, B lance le dé 3 fois, A lance le dé 5 fois, ... Le premier qui gagne est celui qui tire un 1. Est-il possible de piper le dé de sorte que A et B ont la même chance de gagner??

10. **Résolution de l'équation de la chaleur**

Soit $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$. On cherche $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^\infty(Q)$ vérifiant :

- i $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- ii $u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty[$
- iii $u(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, L], h \in \mathcal{C}^1(]0, L[) \cap \mathcal{C}^0([0, L]), h(0) = h(L) = 0.$

- (a) Chercher des solutions à i et ii sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$.
- (b) En déduire l'existence d'une solution à l'équation.
- (c) Principe du maximum : Soit u une solution de l'équation, $T > 0$. On pose $K = [0, L] \times [0, T]$. Montrer que : $\sup_K u = \sup_{K \cap Fr(Q)} u$.
- (d) En déduire l'unicité de la solution à l'équation.