

### 1. Questions de cours

- (a) Caractérisation des points d'adhérence à l'aide des suites convergentes.
  - (b) Sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ .
  - (c) L'espace des fonctions bornées sur un ensemble à valeurs dans un Banach est un Banach pour la norme de la convergence uniforme.
2. Montrer que, si  $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$  pour tout  $n \geq 1$ , alors l'ensemble  $\{u_n, n \geq 1\}$  est dense dans  $[0,1]$ .
3. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Montrer que, si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de boules fermées décroissante pour l'inclusion, alors  $\bigcap_n B_n$  est une boule fermée.

### 4. Convexes d'un evn

Soit  $C$  une partie convexe d'un  $\mathbb{R}$ -evn  $E$ .

- (a) Montrer que son intérieur et son adhérence sont convexes. Montrer que l'intérieur de  $\overline{C}$  est égal à l'intérieur de  $C$ . A quoi est égal l'adhérence de l'intérieur de  $C$ ? Montrer que la frontière de  $C$  est d'intérieur vide. Si  $\varepsilon > 0$  et  $C_\varepsilon = \{x \in E \mid d(x, C) \leq \varepsilon\}$ , montrer que  $C_\varepsilon$  est fermé convexe.
  - (b) On suppose  $O_E \in \text{Int}(C)$ . Montrer que  $\text{Int}(C) = \bigcup_{t \in ]0,1[} tC$  et  $\overline{C} = \bigcap_{t \in ]1,+\infty[} tC$ .
5. On se propose déterminer  $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$ .
- (a) Montrer que  $G = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ et } \exists (x,y) \in S, z = x + y\sqrt{2}\}$  est un sous-groupe multiplicatif de  $\mathbb{R}^*$ . Montrer que les éléments de  $G$  supérieurs à 1 vérifient  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .
  - (b) En déduire  $G$  puis  $S$ .
6. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels  $> 0$ , telle que  $\sum_n a_n$  converge. Pour  $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , on pose,  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant une suite de  $[0,1]$  :  $N(f) = \sum_n a_n |f(t_n)|$ . A quelle condition  $N$  est-elle une norme? La comparer à la norme de la convergence uniforme.
7. Soit  $E$  l'espace des fonctions réelles bornées sur  $[0,1]$  muni de  $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ . Si  $A$  est une partie non vide de  $[0,1]$  et  $X = \{f \in E \mid f|_A = 0\}$ , montrer que  $X$  est égal à sa frontière.
8. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé,  $\mathcal{D}$  est une droite de pente irrationnelle. Déterminer la distance de  $\mathcal{D}$  à l'ensemble des points à coordonnées des entiers relatifs.

### 9. Théorème de Baire

Soit  $(U_n)$  une suite de parties ouvertes de  $\mathbb{R}$ , telles que pour tout  $n$ ,  $U_n$  soit dense dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'ensemble  $D = \bigcap_{n \geq 0} U_n$  est aussi dense dans  $\mathbb{R}$ . A quel type d'espace vectoriel normé peut-on généraliser ce résultat?

En déduire que  $\mathbb{R}$  ne peut être la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide.

10. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Est-ce vrai sur  $\mathbb{R}$ ?

### 11. Espace de suites

- (a) Soit  $c_0 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$ , muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . Montrer qu'il s'agit d'une norme sur  $c_0$  qui en fait un espace de Banach.
- (b) Soit  $l_1 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty\}$ , muni de  $\|\cdot\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ . Montrer qu'il s'agit d'une norme sur  $l_1$  qui en fait un espace de Banach.