

### 1. Questions de cours

- (a) Théorème de Cauchy
- (b) Résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = \tan^2 t$  ( $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ).
- (c) Déterminer les solutions réelles du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x + x \\ y' &= -y - z \\ z' &= 2y + z \end{cases}$$

### 2. Calcul du Wronskien

- (a) Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et deux applications  $p, q : I \rightarrow \mathbb{C}$  continues. On considère deux solutions  $u$  et  $v$  de l'équation différentielle :  
( $L$ ) :  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ . Calculer le wronskien de  $u$  et  $v$  en fonction de sa valeur en un point  $a$  de  $I$ .
  - (b) On veut étendre ce résultat aux systèmes linéaires. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une fonction continue. On considère  $f_1, \dots, f_n$   $n$  solutions sur  $I$  de l'équation différentielle ( $S$ ) :  $Y' = A(t)Y$ . Calculer le wronskien de  $f_1, \dots, f_n$  en fonction de sa valeur en un point  $a$  de  $I$ .
3. On considère l'équation différentielle ( $L$ ) :  $y'' + q(t)y = 0$ , où  $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $\int_0^{+\infty} |q(t)| dt$  converge.
- (a) Soit  $y$  une solution bornée de ( $L$ ). Étudier le comportement de  $y'$  en  $+\infty$ .
  - (b) Montrer que ( $L$ ) admet des solutions non bornées.
4. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0$$

Soit  $\varphi$  une solution non identiquement nulle de ( $E$ ).

- (a) Montrer que pour tout segment inclus dans  $I$ , le nombre de zéros de  $\varphi$  est fini.
  - (b) On suppose que  $\varphi$  s'annule au moins deux fois sur  $I$ , et on considère  $\alpha$  et  $\beta$  deux zéros consécutifs de  $\varphi$  (expliquer pourquoi cela a un sens). Montrer que si  $\psi$  est une solution de ( $E$ ) sur  $I$  non proportionnelle à  $\varphi$ , alors  $\psi(\alpha)\psi(\beta) \neq 0$  et  $\psi$  s'annule une seule fois sur  $]\alpha, \beta[$ .
  - (c) On considère deux équations différentielles :
- $$(E_f) \quad y'' + fy = 0 \quad (E_g) \quad y'' + gy = 0$$
- avec  $f$  et  $g$  continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $f \geq g$ . Montrer que si  $u$  est solution de  $E_g$  ayant  $\alpha$  et  $\beta$  pour zéros consécutifs, et  $v$  est solution de  $E_f$  ne s'annulant pas simultanément en  $\alpha$  et  $\beta$ , alors  $v$  admet un zéro dans  $]\alpha, \beta[$ .
- (d) Si  $f(t) \leq \mu^2$ , et si  $t_1, t_2$  sont deux zéros consécutifs de  $u$ , alors  $t_2 - t_1 \geq \pi/\mu$ .
  - (e) Si  $f(t) \geq \mu^2$ , montrer que  $u$  s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur  $\pi/\mu$ .
5. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u$  une application  $\pi$ -périodique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant l'équation :

$$(E) \quad u'' + (\lambda - \cos(2x))u = 0$$

- (a) Trouver une relation de récurrence entre les coefficients de Fourier de  $u$ .
- (b) On note  $E_1$  l'espace vectoriel des suites complexes indexées par  $\mathbb{Z}$ , bornées et vérifiant la relation de récurrence précédente. Montrer que la dimension de  $E_1$  est inférieure à 1, et que les suites de  $E_1$  sont soit paires, soit impaires.
- (c) On suppose  $\dim(E_1) = 1$ . Montrer que ( $E$ ) possède une solution  $\pi$ -périodique non triviale.

6. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente. Résoudre  $X' = AX$ . Allure des courbes intégrales.
7. Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
- i  $\varphi(0) = I_n$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \varphi'(0)\varphi(x)$ .
  - ii  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \det(\varphi(x)) \neq 0$ .