

1. Questions de cours

- (a) Equivalence des normes
- (b) Théorème de Heine
- (c) Bijection continue et compacité

2. Espace de suites

- (a) Soit $l^1 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty\}$, muni de $\|\cdot\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Montrer que cette norme en fait un espace de Banach.
- (b) Soit $l^\infty = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \|u_n\|_\infty < \infty\}$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \phi : l^\infty &\rightarrow (l^1)' \\ u &\mapsto \phi_u \quad \text{où } \phi_u(v) = \sum u_k v_k. \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est linéaire, continue, isométrique, surjective.

- 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites finies en l'infini. Montrer que f est en fait uniformément continu.
- 4. Soit E une partie compacte d'un evn, et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

- (a) Montrer que f admet un point fixe unique (noté α).
 - (b) Soit x_0 un point quelconque de E . On définit la suite (x_n) par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers α .
 - (c) Ces résultats restent-ils vrais si l'on suppose seulement E complet?
- 5. Soit X une partie compacte d'un evn. On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de X dans \mathbb{R} .
 - (a) Soit $\mathcal{I} \neq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ un idéal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Montrer que $\exists s \in X, \forall f \in \mathcal{I}, f(s) = 0$.
 - (b) Caractériser les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
 - (c) Caractériser les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

6. Théorème d'Ascoli

Rappel: Une partie A d'un evn est dite relativement compacte si \overline{A} est compact.

Définition: X, Y des espaces compacts, $A \subset \mathcal{C}(X, Y)$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. On dit que A est uniformément équicontinue si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall f \in A, \|x - y\| < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ On se propose de démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(1) A est uniformément équicontinue.

(2) A est relativement compacte.

- (a) Démontrer $(2) \implies (1)$.
- (b) On suppose désormais la condition **(2)** réalisée.
 - i. Soit (f_n) une suite de fonctions de A convergeant simplement vers $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Montrer que la convergence est uniforme.
 - ii. Montrer l'existence d'une suite (x_k) de points de X , dense dans X .
 - iii. Soit (f_n) une suite de fonctions de A . Construire une suite extraite (g_n) de (f_n) telle que: pour tout k , la suite $g_n(x_k)$ admette une limite notée $\lambda_k = g(x_k)$.
 - iv. Prolonger g à X , et conclure.
- (c) Application :
On pose $I = [0, 1], E = \mathcal{C}(I, \mathbb{C}), K \in \mathcal{C}(I * I)$. Pour $f \in E$, on définit :

$$\begin{aligned} u(f) : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)dt \end{aligned}$$

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un opérateur compact (ie l'image de la boule unité de E est relativement compacte).

7. Soit E un \mathbb{R} -evn de dimension finie n . On note \overline{B} sa boule unité fermée. Pour $\varepsilon > 0$, on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimum de boules fermées de rayon ε nécessaires pour recouvrir B .

(a) Montrer que $(\frac{1}{\varepsilon})^n \leq N(\varepsilon) \leq (1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$.

(b) On suppose désormais que E est euclidien. Montrer l'existence d'un ensemble R de cardinal 5^n tel que :

$$\forall T \in \mathcal{L}(E), \|T\| \leq 4 * \sup_{(x,y) \in R^2} \langle Tx, y \rangle$$

8. Soit (x_n) une suite de K compact. On suppose que (x_n) admet une unique valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) converge.

9. Dimension infinie

On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Montrer que φ est continue et déterminer sa norme. Cette norme est-elle atteinte sur la boule unité de E ?