

## VARIABLES DISCRÈTES FINIES - EXERCICES PRATIQUES

### Exercice 1 - Loi d'un dé truqué - Deuxième année - ★

1.  $X$  prend ses valeurs dans  $\{1, \dots, 6\}$ . Par hypothèse, il existe un réel  $a$  tel que  $P(X = k) = ka$ . Maintenant, puisque  $P_X$  est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^6 P(X = k) = 1 \iff a \frac{6 \times 7}{2} = 1 \implies a = 1/21.$$

On a donc :

$k$	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule que  $E(X) = \frac{13}{3}$ .

2. On a  $Y = k \iff X = 1/k$ .  $Y$  prend donc ses valeurs dans  $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\}$ , et la loi est donnée par :

$k$	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$P(Y = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :

$$E(Y) = \frac{2}{7}.$$

Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que  $Y = 1/X$  que  $E(Y) = 1/E(X)$ !!!.

### Exercice 2 - Garagiste - Deuxième année - ★

1.  $Z$  est élément de  $\{0, 1, 2\}$ . On a :

$$P(Z = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z = 0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z = 1) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 2) = \frac{8}{25}.$$

2. Remarquons que  $Y$  est à valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$ . On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement  $Y = 0$  se produit si  $X = 0$  ou bien si  $X \geq 1$  et  $Z = 0$ . Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X \geq 1 \cap Z = 0) = P(X = 0) + P(X \geq 1)P(Z = 0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y = 0) = 0,1 + 0,9 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,136.$$

De même, l'événement  $Y = 1$  se produit si  $X = 1$  et  $Z \geq 1$  ou bien si  $X \geq 2$  et  $Z = 1$ . On en déduit :

$$P(Y = 1) = P(X = 1)P(Z \geq 1) + P(X \geq 2)P(Z = 1) = 0,48.$$

Enfin, l'événement  $Y = 2$  est réalisé si  $X \geq 2$  et  $Z = 2$ . Ceci donne :

$$P(Y = 2) = P(X \geq 2)P(Z = 2) = 0,6 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,384.$$

3. La marge brute vaut  $300Y$ . La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y) = 300(0 \times 0,136 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,384) = 374,4.$$

### Exercice 3 - Vaches laitières - Deuxième année - \*

1.  $Y_n$  ne prend que deux valeurs,  $1/n$  et  $1 + 1/n$ . On a en outre :

$$(Y_n = 1/n) \iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où  $P(Y_n = 1/n) = 0,85^n$ . On en déduit - la loi de  $Y$  est une loi de probabilité -  $P(Y = 1 + 1/n) = 1 - (0,85)^n$ . Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n) = \frac{0,85^n}{n} + \frac{n+1}{n}(1 - 0,85^n) = 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n.$$

2.  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $f'(x) = \frac{1+ax}{x}$ .  $f'(x)$  est donc du signe de  $1 + ax$ , ce qui permet de dire que  $f$  est croissante sur  $]0, -1/a[$ , et décroissante ensuite. La limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $-\infty$ , il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de  $f(n)$ , on a  $f(17) > 0,07$  et  $f(18) < -0,03$ . 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle  $f(n)$  est positive. En outre,  $f(1) < 0$  alors que  $f(2) > 0$ . L'ensemble d'entiers recherché est donc  $\{2, \dots, 17\}$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) < 1 &\iff 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n < 1 \\ &\iff 0,85^n > \frac{1}{n} \\ &\iff n \ln(0,85) > -\ln n. \end{aligned}$$

Par suite,  $E(Y_n) < 1 \iff f(n) > 0$ . L'étude précédente montre que les entiers  $n$  pour lesquels  $f(n) > 0$  est  $\{2, \dots, 17\}$ . On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

VARIABLES DISCRÈTES FINIES - EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 4 - Maximiser l'espérance - Oral ESCP - ★★

- On a  $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ , et par indépendance des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  :
  - si  $k \leq a$ ,  $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$ .
  - si  $k > a$ ,  $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) + P((X_2 = k) \cap (X_2 > a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$ .On a bien  $a \times \frac{a}{n^2} + (n - a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$ .

2. Le calcul de l'espérance est facile :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^a k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^n k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^n \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

3. On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n} \left( \frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2 \right).$$

Ainsi,  $E(Y)$  est maximale pour  $|a - n/2|$  le plus petit possible :

- si  $n$  est pair, c'est pour  $a = n/2$ .
- si  $n$  est impair, c'est pour  $a = (n - 1)/2$  ou  $a = (n + 1)/2$ .

Exercice 5 - Entropie d'une variable aléatoire - L3 - ★★

- Si  $X$  est constante, on a  $p_i = 1$  pour un  $i$  et  $p_j = 0$  pour  $j \neq i$ . On en déduit que  $H(X) = -1 \times \ln(1) = 0$ .
- Si  $X$  est équirépartie, on a  $p_i = 1/n$  pour tout  $i$ . On en déduit

$$H(X) = \sum_{i=1}^n -\frac{\ln(1/n)}{n} = -\ln(1/n) = \ln(n).$$

- Posons  $f(x) = -x \ln(x)$ . Cette fonction est concave, car sa dérivée seconde est  $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ . On a donc

$$\frac{1}{n}f(p_1) + \dots + \frac{1}{n}f(p_n) \leq f\left(\frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right) \leq f(1/n)$$

ce qui se traduit encore en

$$\sum_{i=1}^n f(p_i) \leq \sum_{i=1}^n f(1/n) = \ln n.$$

Ainsi, on a toujours  $H(X) \leq \ln n$  et cette valeur est atteinte quand  $X$  est équadistribuée.  $H(X)$  mesure le désordre engendré par  $X$ . Lorsque  $X$  ne prend qu'une seule valeur, son entropie est nulle (pas de désordre). Lorsque la variable est équadistribuée, le désordre est maximal et l'entropie aussi.

VARIABLES DISCRÈTES INFINIES

**Exercice 6 - Une certaine variable aléatoire - Oral ESCP - \***

1. L'événement  $X = n$  correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des  $n + 1$  premiers tirages, et le  $n + 2$ -ième tirage donne un face. Il y a donc  $n + 1$  choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut  $p^2(1 - p)^n$ . On a donc :

$$P(X = n) = (n + 1)p^2(1 - p)^n.$$

2. La série définissant  $E(X)$  est évidemment convergente, et sa sommation est facile (si elle vous semble difficile, il faut réviser comment faire, par exemple en utilisant les séries entières). On trouve :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{2(1 - p)}{p}.$$

3. Si  $n \geq 1$  est fixé, et  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a clairement :

$$P(Y = k|X = n) = \frac{1}{n + 1}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k|X = n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n + 1)p^2(1 - p)^n \frac{1}{n + 1} = p(1 - p)^k. \end{aligned}$$

On reconnaît que  $Y + 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ . On a donc :

$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p}.$$

Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.

4. On a :

$$(Z = h) = \sum_{j=0}^{\infty} [(Y = j) \cap (X = h + j)].$$

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned} P(Z = h) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(Y = j|X = h + j)P(X = h + j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1 - p)^{h+j} \\ &= p(1 - p)^h. \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} P[(Z = h), (Y = j)] &= P(X = h + j, Y = j) = P(Y = j | X = h + j)P(X = h + j) \\ &= p^2(1 - p)^{h+j}. \end{aligned}$$

Ceci est égal à  $P[(Z = h), (Y = j)]$ . Les variables aléatoires sont indépendantes.

### Exercice 7 - Deux fois pile - Deuxième année - ★

1. On note  $P_k$  (resp.  $F_k$ ) l'événement on obtient pile (resp. face) au  $k$ -ième lancer. L'événement  $(X = 2)$  correspond à :

$$(X = 2) = P_1P_2 \implies p_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De même,

$$(X = 3) = F_1P_2P_3 \implies p_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Pour  $(X = 4)$ , cela se corse un peu !

$$(X = 4) = F_1F_2P_3P_4 \cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de  $p_4$  : pour obtenir  $X = n$ , on peut :
- ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer (proba  $2/3$ ). Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon  $X = 2$ ), donc avec encore une probabilité de  $2/3$ . Maintenant, il reste  $n - 2$  lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du  $n - 2$ ième. Ceci se produit avec une probabilité valant  $p_{n-2}$ .
  - ou bien avoir obtenu face au 1er lancer (proba  $1/3$ ). Il reste  $n - 1$  lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du  $n - 1$ -ième, ce qui se produit avec une probabilité valant  $p_{n-1}$ .

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique  $r^2 = r/3 + 2/9$  a pour solution  $2/3$  et  $-1/3$ . On en déduit finalement :

$$p_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine  $\alpha$  et  $\beta$  en testant sur les premiers termes. On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. Il est bien connu que pour tout  $q \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{17}{4}.$$

### Exercice 8 - Loi de Pascal - L2 - \*

Il est d'abord clair que  $X$  prend ses valeurs dans  $\{r, r+1, \dots\}$ . Soit  $k \geq r$ . Remarquons que si  $X = k$ , alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu  $r-1$  fois pile, parmi  $k-1$  lancers. Le nombre de tirages correspondant à  $X = k$  est donc  $\binom{k-1}{r-1}$ . La probabilité de chaque lancer est  $p^r(1-p)^{r-k}$ . On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

### Exercice 9 - Rangée de spots - Oral ESCP - \*\*

1. Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant  $n$ , c'est qu'il y a eu la succession d'événement  $A_k$  : "le spot  $S_1$  est éclairé à l'instant  $k$ ". Par la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) \dots P(A_1) = \frac{1}{4^n}.$$

2. Clairement(!), on a  $P(X = 1) = 1/4$ . D'autre part,  $(X = 2)$  est réalisé, soit si le spot  $S_1$  reste allumé à l'instant 1 et le spot  $S_2$  s'allume à l'instant 2, soit si le spot  $S_3$  s'allume à l'instant 1 (et  $S_2$  s'allumera automatiquement à l'instant 2). Ces deux cas sont disjoints, donc :

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

3. Soit  $n \geq 3$ .  $S_3$  s'allume pour la première fois à l'instant  $n$  si et seulement si :
  - Soit  $S_1$  reste allumé jusqu'à l'instant  $n-1$ , et  $S_2$  s'allume à l'instant  $n$ .
  - Soit  $S_1$  reste allumé jusqu'à l'instant  $n-2$ , et  $S_3$  s'allume à l'instant  $n-1$ .
  - Soit  $S_1$  reste allumé jusqu'à l'instant  $n-3$ , et  $S_4$  s'allume à l'instant  $n-2$ .Ces cas étant disjoints, on obtient :

$$\forall n \geq 3, P(X = n) = \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-2}} \frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-3}} \frac{1}{4} = \frac{21}{4^n}.$$

4. La convergence de la série étant évidente, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{8} + 21 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{4^n}. \end{aligned}$$

La somme de la série se calcule en utilisant  $\sum_{x \geq 0} x^n = 1/(1-x)$  pour  $|x| < 1$ , en dérivant cette égalité, et en faisant  $x = 1/4$ . On obtient finalement :

$$E(X) = \frac{7}{3}.$$

**Exercice 10 - Une autre expression de l'espérance - L2/L3/Master Enseignement - \*\***

1. (a) Pour  $n \geq 1$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-k)P(X > k) - nP(X > n) + P(X > 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n). \end{aligned}$$

(b) On a, pour tout entier  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

(c) Si  $X$  admet une espérance, la série  $\sum kP(X = k)$  converge. Mais :

$$0 \leq nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque  $n$  tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

(d) On utilise le même type d'argument :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2P(X = k) &= \sum_{k=0}^n k^2(P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)P(X > k) - n^2P(X > n). \end{aligned}$$

Si  $X$  admet une variance,  $X$  admet un moment d'ordre 2, et la série  $\sum k^2P(X = k)$  converge. Mais :

$$0 \leq n^2P(X > n) = n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X = k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, et donc :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P(X > k).$$

2. (a) On a  $X \leq k$  si et seulement si les  $n$  épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à  $k$ , et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de  $X$ , on trouve, pour  $1 \leq k \leq N$  :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{k^n - (k - 1)^n}{N^n}.$$

- (b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

- (c) On reconnaît ici une somme de Riemann de la fonction  $x \mapsto x^n$ , continue sur  $[0, 1]$ .  
On a donc, pour  $N$  qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

- (d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \rightarrow 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$