Diverses notions de convergence

Exercice 1 - Une suite de variables aléatoires - *ECS/L3* - ⋆

1. On remarque que f_n est positive et continue. De plus, pour tout $x>0$,
$$\int_{-\infty}^x f_n(t)dt=\int_0^x n^2t\exp(-n^2t^2/2)dt=\Big[-\exp(-n^2t^2/2)\Big]_0^1=1-\exp(-n^2x^2/2).$$
Faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1,$$
ce qui achève de prouver que f_n est une densité de probabilité.
2. Soit $\varepsilon>0$. On a
$$\begin{aligned}P(|X_n|\geq\varepsilon)&=\int_\varepsilon^{+\infty}n^2t\exp(-n^2t^2/2)\\&=\Big[-\exp(-n^2t^2/2)\Big]_\varepsilon^{+\infty}\\&=\exp(-n^2\varepsilon^2/2).\end{aligned}$$
Lorsque $n\to+\infty$, ceci tend vers 0. On en déduit que (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle ($X=0$).

Exercice 2 - Maximum de lois uniformes - *L3/ECS* - ⋆⋆

1. On commence par déterminer la fonction de répartion de M_n. Puisque M_n est à valeurs dans $[0,1]$, il est clair que si $x\leq 0$, on a $P(M_n\leq x)=0$ et si $x\geq 1$, on a $P(M_n\leq x)=1$. Prenons maintenant $x\in]0,1[$. Alors :
$$M_n\leq x\iff \forall i\in\{1,\dots,n\},\ X_i\leq x.$$
Puisque les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes, on en déduit que
$$P(M_n\leq x)=\prod_{i=1}^n P(X_i\leq x)=x^n.$$
Pour obtenir la fonction de répartition de X_n, on remarque que
$$X_n\leq x\iff M_n\geq 1-\frac{x}{n},$$
d'où
$$P\left(X_n\leq x\right)=1-P\left(M_n\leq 1-\frac{x}{n}\right).$$
De plus,
$$1-\frac{x}{n}\in[0,1]\iff x\in[0,n].$$

On en déduit que la fonction de répartition de (X_n) est donnée par

$$F_{X_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ 1-(1-\frac{x}{n})^n & \text{si } 0\leq x\leq n\\ 1 & \text{si } x\geq n.\end{cases}$$

2. On va étudier, à x fixé, la limite de $F_{X_n}(X)$. D'abord, pour $x\leq 0$, il est clair que $\lim_n F_{X_n}(x)=0$. Maintenant, pour $x\geq 0$, dès que n est assez grand, on a $x\leq n$ et donc

$$F_{X_n}(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

Or, en passant à l'exponentielle, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}.$$

On en déduit que $F_{X_n}(x)$ tend vers $F(x)$ défini par

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

On en déduit que (X_n) converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3 - Convergence en loi pour une suite de variables à densité - *ECS2/L2* - ⋆

1. f_n étant continue et positive, elle sera une densité de variable aléatoire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=1.$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}dx=\frac{a}{\pi}\left[\arctan(nx)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{a}{\pi}\times\pi=a.$$

f_n est donc une densité de variable aléatoire si et seulement si $a=1$.

2. On a $xf_n(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{\pi nx}$ dont l'intégrale est divergente au voisinage de $+\infty$, et qui est une fonction positive. Ainsi, la variable aléatoire X_n n'admet pas d'espérance, ni aucun autre moment.
3. Notons F_n la fonction de répartion de X_n, définie par

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}f_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\left(\arctan(nx)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Si $x<0$, $\arctan(nx)\to-\pi/2$, et donc $F_n(x)\to 0$. Si $x>0$, $\arctan(nx)\to\pi/2$ et donc $F_n(x)\to 1$. Soit maintenant X une variable aléatoire identiquement nulle. Sa fonction de répartition F_X vérifie $F_X(x)=0$ si $x<0$ et $F_X(x)=1$ si $x\geq 0$. Autrement dit, en tout point de continuité de F_X, la suite $(F_n(x))$ converge vers $F_X(x)$. C'est exactement la définition de la convergence en loi de la suite (X_n) vers X.

Autour de l'inégalité de Bienayme-Tchebichev

Exercice 4 - Une variante de l'inégalité de Markov - version L2/ECS - *L2/ECS* - ⋆⋆

1. On va copier la preuve de l'inégalité de Markov. En effet, on écrit

$$\begin{aligned} P(X \geq \lambda m) &= \int_{\lambda m}^{+\infty} f(x)dx \\ &\leq \int_{\lambda m}^{+\infty} \frac{x}{\lambda m} f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda m}\int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda m} \times m \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

2. On remarque que

$$F(q) = P(X \leq q) = P\left(X \leq m \times \frac{q}{m}\right) = 1 - P\left(X \geq m \times \frac{q}{m}\right) \geq 1 - \frac{m}{q}$$

d'après la question précédente. Or, on sait que $F(q) = 3/4$. On en déduit bien que $q \leq 4m$.

Exercice 5 - Une variante de l'inégalité de Markov - version L3 - *L3* - ⋆⋆

On va copier la preuve de l'inégalité de Markov. En effet, on écrit

$$\begin{aligned} P(X \geq \lambda m) &= \int_{\lambda m}^{+\infty} x dP_X(x) \\ &\leq \int_{\lambda m}^{+\infty} \frac{x}{\lambda m} dP_X(x) \\ &\leq \frac{1}{\lambda m}\int_0^{+\infty} x dP_X(x) \\ &\leq \frac{1}{\lambda m} \times m \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Théorème Central Limit

Exercice 6 - Fournisseur d'accès - *Deuxième année* - ⋆

1. X compte le nombre de succès lors de la réalisation de 5000 épreuves aléatoires indépendantes, dont la probabilité de réalisation de chacune est 0,2. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(5000, 0.2)$. Son espérance vaut $5000 \times 0,2 = 1000$, sa variance $5000 \times 0,2 \times 0,8 = 800$.

2. On est dans les conditions d'application du théorème Central-Limit (ou du théorème de De Moivre-Laplace).
3. On cherche N tel que $P(X\geq N)\leq 0,975$. Mais on a :

$$X\geq N \iff Y\geq \frac{N-1000}{\sqrt{800}}.$$

On en déduit, en notant ϕ la fonction de répartition de la loi normale :

$$\begin{aligned} P(X\geq N)\leq 0,025 &\iff P\left(Y\geq \frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right)\leq 0,025\\ &\iff 1-\phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right)\leq 0,025\\ &\iff \phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right)\geq 0,975\geq \phi(2)\end{aligned}$$

Cette condition sera réalisée dès que :

$$\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\geq 2 \iff N\geq 1057.$$

Il faut installer pouvoir gérer au moins 1057 connexions simultanées - ce qui est finalement assez peu !

Exercice 7 - La cantine ! origine - *Deuxième année* - $\star$

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves choisissant la première salle. Alors tous les élèves trouvent une place si $X\leq N$ et si $500-X\leq N$, soit

$$500-N\leq X\leq N.$$

De plus, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(500,p)$. On a $500>30$ et $n\times 1/2\times\left(1-\frac12\right)\geq 5$. On est donc dans les conditions où on peut approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}\left(500\times\frac12,\sqrt{500\times\frac12\times\frac12}\right)$ ie $\mathcal{N}(250,\sqrt{125})$. Posons

$$Y=\frac{X-250}{\sqrt{125}}.$$

On peut considérer que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et on cherche N tel que

$$P\left(\frac{500-N-250}{\sqrt{125}}\leq Y\leq \frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)\geq 0,99.$$

Or,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{500-N-250}{\sqrt{125}}\leq Y\leq \frac{N-250}{\sqrt{125}}\right) &= P\left(\frac{250-N}{\sqrt{125}}\leq Y\leq \frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)\\ &= \phi\left(\frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)-\phi\left(\frac{250-N}{\sqrt{125}}\right)\\ &= 2\phi\left(\frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)-1.\end{aligned}$$

où ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche donc N tel que

$$2\phi\left(\frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)-1\geq 0,99 \iff \phi\left(\frac{N-250}{\sqrt{125}}\right)\geq 0,995\simeq\phi(2,575).$$

Ceci est vérifié dès que $\frac{N-250}{\sqrt{125}}\geq 2,575$, c'est-à-dire dès que $N\geq 279$.

Exercice 8 - Saturation de standard - *Deuxième année* - ⋆⋆

On note N le nombre de lignes installées, et X le nombre d'employés qui téléphonent à l'instant t. On cherche N tel que $P(X\geq N)\leq 0,025$. La probabilité pour qu'un employé téléphone à l'instant t est $6/60=1/10$. Les appels des employés étant supposés indépendants, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(300,1/10)$. L'espérance de X vaut 30, et l'écart-type $\sqrt{27}$. Posons $X^*=\frac{X-30}{\sqrt{27}}$. Par le théorème Central-Limit, on peut considérer que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale. On a :

$$\begin{aligned}
P(X\geq N)\leq 0,025 &\iff P\left(X^*\geq\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right)\leq 0,025\\
&\iff 1-\phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right)\leq 0,025\\
&\iff \phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right)\geq 0,975=\phi(1,96)\\
&\iff \frac{N-30}{\sqrt{27}}\geq 1,96\\
&\iff N\geq 41.
\end{aligned}$$

Il faut installer au moins 41 lignes !

Exercice 9 - Surréservation aérienne - *Deuxième année* - ⋆⋆

1. S_n compte le nombre de succès de réalisations de n expériences aléatoires, la probabilité de succès de chacune étant $9/10$. On en déduit que S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,9/10)$. En utilisant les formules du cours, on a :

$$E(S_n)=0,9n \text{ et } V(S_n)=0,09n.$$

2. On note $Y_n=\frac{S_n-0,9n}{0,3\sqrt{n}}$. Remarquons que

$$S_n\leq 300 \iff Y_n\leq\frac{1000}{\sqrt{n}}-3\sqrt{n}.$$

Le théorème central limite justifie que l'on peut approcher la loi de Y_n par la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale. On a l'approximation :

$$P\left(Y_n\leq\frac{1000}{\sqrt{n}}-3\sqrt{n}\right)\simeq\phi\left(\frac{1000}{\sqrt{n}}-3\sqrt{n}\right).$$

Or, une table de la loi normale nous dit que :

$$\phi(2,4)\geq 0,99.$$

La fonction de répartition étant croissante, il suffit que :

$$\frac{1000 - 3n}{\sqrt{n}} \geq 2,4.$$

On obtient l'équation :

$$-3n - 2,4\sqrt{n} + 1000 \geq 0.$$

En posant $x = \sqrt{n}$, on a une fonction du second degré à étudier (trouver le plus grand x pour lequel elle est positive), ce qui à ce stade ne devrait plus poser trop de problèmes. Le plus grand n pour lequel cette quantité est positive est 316.