

Exercices - Lois discrètes usuelles : corrigé

Exercice 1 - Avion - L2/Prépa Hec - ★

On note X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, p)$. En particulier, on a :

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0} + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^{4-1} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3.$$

D'autre part, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$. En particulier,

$$P(Y = 0) = (1-p)^2.$$

On a intérêt à prendre l'avion A si $P(X = 0) + P(X = 1) \geq P(Y = 0)$. Ceci donne :

$$p(1-p)^2(2-3p) \geq 0.$$

Donc, si $0 \leq p < 2/3$ (cas que l'on espère être celui du monde réel), il est préférable de choisir A . Si $p = 2/3$, le choix est indifférent, et si $p > 2/3$, il vaut mieux choisir B .

Exercice 2 - Pièce de monnaie - L2/Prépa Hec - ★

1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. On en déduit : $P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,3)^3 (1-0,3)^{10-3} \simeq 0,27$.
2. Soit Y le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention de pile pour la première fois. Y est le temps d'attente de la première réalisation de l'événement "obtenir pile" de probabilité constante 0,3 lors d'une suite de lancers indépendants, donc Y suit une loi géométrique de paramètre 0,3. On en déduit, en appliquant la formule du cours du calcul de l'espérance d'une loi géométrique

$$E(Y) = \frac{1}{0,3} = \frac{3}{10}.$$

Exercice 3 - Service de dépannage - L2/Prépa Hec - ★

1. (a) Soit R l'événement "le client a subi un retard". X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante 1/4 au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/4)$. En particulier, on a :

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

- (b) On cherche $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. (a) On note $p = 0,25$ et $q = 1 - 0,25$. On reconnaît le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale. On a donc :

$$P(Z = k | Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P(Z = k, Y = n) &= P(Y = n)P(Z = k|Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-m} \frac{m^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Il faut réaliser la sommation! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z = k, Y = n) \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k e^{mq} \\ &= e^{-mp} \frac{(mp)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

3. U est le rang de la première réalisation de l'événement R de probabilité $1/4$ au cours d'une succession d'appels indépendants. Y suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k \geq 1$,

$$P(U = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance (on calcule simplement la somme d'une série géométrique), et on trouve que

$$E(U) = 4.$$

Exercice 4 - Le concierge - L2/Prépa Hec - ★★

Notons p_k la probabilité que la porte soit ouverte au k -ième essai et V_k l'événement "la porte n'est pas ouverte après le k -ième essai". On a

$$p_k = P(V_k^c \cap V_{k-1}) = P(V_{k-1}) - P(V_k),$$

la dernière formule venant du fait que (V_k) est une suite décroissante d'événements. Dans chaque cas, on va calculer $P(V_k)$ en utilisant la formule

$$P(V_k) = P(V_k|V_{k-1})P(V_{k-1}).$$

1. Si V_{k-1} est vraie, au k -ième essai, le concierge choisit au hasard une clef parmi les $n - (k-1)$ qui restent. On a donc

$$P(V_k) = \left(1 - \frac{1}{n - k - 1}\right) P(V_{k-1}) = \frac{n - k}{n - k - 1} P(V_{k-1}).$$

Par une récurrence aisée, on trouve donc que, pour $k \leq n$,

$$P(V_k) = \frac{n - k}{n}$$

et $P(V_k) = 0$ si $k \neq n$. On a donc, pour $1 \leq k \leq n$,

$$p_k = \frac{n - k - 1}{n} - \frac{n - k}{n} = \frac{1}{n}.$$

Le nombre moyen d'essais vaut donc

$$\sum_{k=1}^n k p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n - 1}{2}.$$

2. Cette fois, si V_k est vraie, le concierge tire une clef parmi les n du trousseau, et donc

$$P(V_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) P(V_{k-1}) = \frac{n - 1}{n} P(V_{k-1}).$$

On obtient cette fois, pour $k \geq 0$,

$$P(V_k) = \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k,$$

puis

$$p_k = \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{k-1} - \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k = \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}.$$

En reconnaissant une loi géométrique de paramètre $1/n$, on trouve que le nombre moyen d'essais nécessaires est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = n.$$

Finalement, ce n'est pas si différent !

Exercice 5 - Chaîne de fabrication - Ecricome - **

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$. Soit D = "l'objet est défectueux". On a $P(D|A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$ et comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) P(A) + P(D|B) P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Exercices - Loix discrètes usuelles : corrigé

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

- (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$
- (b) Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n , qui sont défectueux **indépendamment** les uns des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$ et $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$
- (c) Comme $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n] P(Y = n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M P[X = k|Y = n] P(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P[X = k|Y = n] P(Y = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^M P[X = k|Y = n] P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^M \frac{n!}{k! (n-k)! n!} (0.9 \cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^M \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

Exercice 6 - Pile ou face - Oral ESCP - ★★

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile ; elle suit la loi géométrique de paramètre p , donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Soit $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1 = \dots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \dots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, \dots, X_{i_1+\dots+i_n} = 1.$$

Donc, en posant $q = 1 - p$, on a :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1} p q^{i_2-1} p \dots q^{i_n-1} p.$$

En sommant pour (i_1, \dots, i_{n-1}) parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1} p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p . De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = P(A_1 = i_1) \dots P(A_n = i_n),$$

ce qui montre que les variables A_1, \dots, A_n sont indépendantes.