Exercices - Probabilités conditionnelles et indépendance : corrigé

Probabilités conditionnelles

Exercice 1 - CD-Rom - *Deuxième année* - ⋆

1. L'énoncé donne directement $P(A) = 0,05$, d'où $P(A^c) = 0,95$, $P(D|A) = 0,6$ et $P(D^c|A^c) = 0,98$. On en déduit :
$$P(D^c|A) = 1 - P(D|A) = 0,4$$
$$P(D|A^c) = 1 - P(D^c|A^c) = 0,02.$$
D'après la formule des probabilités totales :
$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(A^c)P(D|A^c) = \frac{49}{1000}.$$
2. On obtient $P(A|D)$ grâce à la formule de Bayes :
$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{30}{49}.$$

Exercice 2 - QCM - *Deuxième année* - ⋆

On note :
$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\}$$
$$C = \{\text{L'étudiant connait la bonne réponse}\}.$$
On cherche $P(C|B)$, et l'énoncé donne :
$$P(C) = p,\ P(B|C) = 1,\ P(B|C^c) = \frac{1}{m}.$$
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(B) = P(C)P(B|C) + P(C^c)P(B|B^c) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$
D'après la formule de Bayes :
$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}.$$

Exercice 3 - Dé pipé - *Deuxième année* - ⋆

On note D l'événement : "le dé est pipé", et S l'événement : "on obtient 6". L'énoncé donne $P(D) = 25/100$ et $P(S|D) = 1/2$? La formule de Bayes nous permet de calculer $P(D|S)$:
$$P(D|S) = \frac{P(D)P(S|D)}{P(D)P(S|D) + P(\overline{D})P(S|\overline{D})}.$$
Comme on a $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 3/4$ et $P(S|\overline{D}) = 1/6$, on obtient finalement :
$$P(D|S) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 - Pièces défectueuses - *Deuxième année* - ⋆

1. On note A l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et B l'événement "la pièce est bonne". L'événement E "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc :
$$P(E)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B).$$
Maintenant, $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})P(\overline{B})$. Or, $P(\overline{B})=0,05$, et $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=0,02$. De même, on a $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}|B)P(B)$ et on a $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=0,04$. On obtient finalement :
$$P(E)=0,95\times 0,04+0,05\times 0,02.$$
2. Dans cette question, on cherche $P(\overline{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant B. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.
$$\begin{aligned} P(\overline{B}|A) &= \frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}\\ &= \frac{0,05\times 0,02}{0,95\times 0,96+0,05\times 0,02}=\frac{1}{913}\simeq 0,001. \end{aligned}$$

Exercice 5 - Compagnie d'assurance - *Deuxième année* - $\star$

1. On note A l'événement "avoir un accident dans l'année". Comme les trois classes R_1, R_2 et R_3 réalisent une partition de la population. On peut appliquer la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R_1)P(R_1)+P(A|R_2)P(R_2)+P(A|R_3)P(R_3)\\ &= 0,05\times 0,2+0,15\times 0,5+0,3\times 0,3\\ &= 0,175. \end{aligned}$$
2. On cherche la probabilité d'être dans R_1 sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est-à-dire la probabilité $P(R_1|\overline{A})$. La formule de Bayes donne :
$$P(R_1|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|R_1)P(R_1)}{P(\overline{A})}.$$
La probabilité $P(\overline{A})$ se calcule par la formule $P(\overline{A})=1-P(A)$, tandis que l'énoncé donne $P(\overline{A}|R_1)=0,95$. On obtient finalement :
$$P(R_1|\overline{A})=\frac{0,95\times 0,2}{1-P(A)}=0,23.$$

Exercice 6 - Sauts de puce - *L2/ECS* - $\star\star$

1. (a) Par définition, on a $u_0=1$ (le processus commence en 0, il s'arrête immédiatement, en 0), et $u_N=0$ (le processus commence en N, il s'arrête aussitôt, en N).

(b) On note A l'événement : "Partant de a, le processus s'arrête en 0", B l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a+1$", et C l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a-1$". Par la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C).$$

Maintenant, puisqu'on part à l'instant $t = 0$ de a, on a $P(B) = p$ et $P(C) = q$. D'autre part, si la particule est à l'instant 1 en $a+1$, la probabilité que le processus s'arrête en 0 vaut u_{a+1}. On a donc : $P(A|B) = u_{a+1}$, et de même $P(A|C) = u_{a-1}$. On en déduit la formule de récurrence :

$$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$

(c) Pour a allant de 1 à $N-1$, la suite (u_a) vérifie la formule de récurrence :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a - \frac{q}{p}u_{a-1}.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence est :

$$r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p} = 0.$$

Cette équation du second degré admet deux solutions distinctes,

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{q}{p}$$

(remarquer ici l'utilisation de l'hypothèse $p \neq 1/2$ qui permet d'affirmer que les deux racines sont distinctes). Il existe donc des réels λ et μ tels que, pour tout a dans $\{0, \dots, N\}$, on ait :

$$u_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Utilisant que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on obtient :

$$u_a = \frac{q^N}{q^N - p^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

2. Le même raisonnement prouve que :

$$v_a = pv_{a+1} + qv_{a-1}.$$

La résolution de cette récurrence donne :

$$v_a = \frac{p^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{q^N - p^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

3. On vérifie aisément que $u_a + v_a = 1$. Ceci signifie que, presque sûrement, le processus va s'arrêter.

Indépendance d'événements

Exercice 7 - Circuit électrique - *Deuxième année* - ⋆

1. On procède en deux temps. D'une part :
$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$
Mais,
$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C),$$
et
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
On appelle aussi ceci la formule du crible de Poincaré, elle se généralise avec plusieurs événements par récurrence.
2. On note F_i l'événement : "le circuit C_i fonctionne". Par hypothèse, les événements F_i sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$, pour le second $P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$, et pour le troisième $P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3))$. On a :
   (a) Par indépendance des événements :
   $$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p_1p_2p_3.$$
   (b) D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :
   $$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3.$$
   (c) L'événement $F_1 \cup F_2$ est indépendant de C_1. On a donc :
   $$P(C_1 \cap (C_2 \cup C_3)) = P(C_1)P(C_2 \cup C_3) = P(C_1)\big(P(C_2) + P(C_3) - P(C_2 \cap C_3)\big)$$
   soit
   $$P(C_1 \cap (C_2 \cup C_3)) = p_1\,(p_2 + p_3 - p_2p_3)\,.$$

Exercice 8 - Indépendance et contexte - *Deuxième année* - ⋆

1. On a :
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$
$$B = \{3, 6, 9, 12\}$$
$$A \cap B = \{6, 12\}.$$
On a donc $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont indépendants.

2. Les événements A, B et $A \cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13$, $P(B) = 4/13$ et $P(A \cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13, la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

Exercice 9 - Indépendance impossible - *Deuxième année* - ⋆⋆

Supposons qu'il existe A et B deux événements non triviaux indépendants. On note m le cardinal de A et n le cardinal de B. On a donc $P(A) = m/p$ et $P(B) = n/p$. Puisque A et B sont supposés indépendants, et toujours parce que le modèle adopté est celui de l'équiprobabilité, on a :

$$\mathrm{card}(A \cap B) = p \times P(A \cap B) = \frac{mn}{p}.$$

Puisque le cardinal est un entier, p divise le produit mn, et par le théorème de Gauss, il divise l'un des deux, disons n. D'autre part, puisque $n \leq p$, ceci n'est possible que si $n = 0$ ou $n = p$. Autrement dit, seulement si A est ou l'événement certain, ou l'événement impossible, c'est-à-dire un événement trivial.

Exercice 10 - Indicatrice d'Euler - *L2/L3/Master Enseignement* - ⋆⋆⋆

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x. On a donc :
$$B = A_{p_1}^c \cap \dots \cap A_{p_r}^c.$$
2. Il suffit de calculer le cardinal de A_m. Mais si $n = km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont m, $2m, \dots, km$. On a donc
$$P(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$
3. Soit $i_1 < \dots < i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1, \dots, r\}$. On doit prouver que
$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}).$$
Mais,
$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{p_{i_j}}.$$
D'autre part, puisque $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$ sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque p_{i_j}, $j = 1, \dots, m$. On en déduit que
$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$
soit
$$P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$
ce qui prouve le résultat voulu.
4. Les événements $A_{p_1}^c, \dots, A_{p_r}^c$ sont également indépendants. On en déduit que
$$P(B) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{p_j}^c) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

5. Un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x = 1, \dots, n$, est inversible si et seulement s'il est premier avec n. On a donc
$$P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$
ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

Problèmes ouverts

Exercice 11 - **Tests de dépistage** - *Deuxième année* - ⋆⋆

Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade ? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note M l'événement "La personne est malade", et T l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M) = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0,99$ et $P(T|M^c) = 0,001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned} P(M|T) &= \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|M^c)P(M^c)} \\ &= \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 10^{-3} \times 0,9999} \\ &\simeq 0,09. \end{aligned}$$

C'est catastrophique ! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique !

Exercice 12 - **Menteur !** - *Deuxième année* - ⋆⋆⋆

Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P, F, H, T les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H) = 1/2$ et $P(F|H) = 1/2$ et $P(P|T) = 1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut !). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P) = \frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T) + P(P|H)P(H)} = \frac{x}{x + 1/2(1-x)} = \frac{2x}{x+1}.$$