Exercices - Raisonnements mathématiques de base - absurde - contraposée - récurrence -... : corrigé

Raisonnement par l'absurde

Exercice 1 - Principe des tiroirs - *L1/Math Sup* - ⋆

Supposons que tous les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes. Alors il y aura au plus $1+1+\cdots+1=n$ paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $(n+1)$. Donc un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

Exercice 2 - Nombres dans un intervalle - *L1/Math Sup* - ⋆

1. La traduction immédiate de la propriété est :
$$\exists (i,j)\in\{0,\dots,n\},\ (i<j)\wedge(x_j-x_i\leq 1/n).$$
Pour utiliser simplement les valeurs x_i-x_{i-1}, il suffit de remarquer que si deux nombres sont distincts de moins de $1/n$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distincts de moins de $1/n$. Ceci signifie :
$$\exists i\in\{1,\dots,n\},\ x_i-x_{i-1}\leq 1/n.$$
2. Le contraire de cette assertion est donc :
$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i-x_{i-1}> 1/n.$$
3. Supposons la propriété de l'exercice fausse, c'est-à-dire que
$$\exists i\in\{1,\dots,n\},\ x_i-x_{i-1}\leq 1/n. \tag{1}$$
En écrivant
$$x_n-x_0=x_n-x_{n-1}-x_{n-1}-x_{n-2}+\cdots+x_2-x_1+x_1-x_0$$
on a donc, en utilisant (1) :
$$x_n-x_0>n\times\frac{1}{n}=1.$$
C'est absurde. La propriété initiale est donc vraie.
4. On considère les n intervalles $I_1=[0,1/n[,\ I_2=[1/n,2/n[$,...,$I_n=[(n-1)/n,1]$ (qui correspondent si l'on veut à n tiroirs). On veut y placer $(n+1)$ points (les chaussettes !). Il faut obligatoirement qu'il y ait deux points dans le même intervalle. Ces deux points seront distants de moins de $1/n$.

Raisonnement par contraposée

Exercice 3 - Pair/impair - *L1/Math Sup* - ⋆

La contraposée de la proposition est : si n est pair, alors n^2 est pair. Démontrons cela. Si n est pair, alors il s'écrit $2k$ où k est un autre entier. Mais alors n^2 s'écrit $(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$ et est donc pair. Par le principe de contraposition, on a démontré l'implication de l'énoncé.

Exercice 4 - Divisibilité par 8 - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. Prenons n un entier impair. n s'écrit donc $2l + 1$ où l est un entier. Si l est pair, $l = 2k$ et donc $n = 4k + 1$. Si l est impair, $l = 2k + 1$ est donc $n = 4k + 3$. Dans tous les cas, on a donc $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$. On passe au carré :
$$n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = 8(2k^2kr) + r^2 - 1.$$
Or, si $r = 1$, $r^2 - 1 = 0$ et $n^2 - 1$ est divisible par 8. Si $r = 3$, $r^2 - 1 = 8$ et $n^2 - 1$ est aussi divisible par 8 !
3. Par le principe de contraposition, oui !

Raisonnement par récurrence

Exercice 5 - Pour se mettre en confiance... - *L1/Math Sup* - ⋆

On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n) =$ "$2^{n-1} \leq n! \leq n^n$". $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, puisque $2^0 = 1! = 1^1 = 1$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On commence par prouver l'inégalité de gauche. On remarque d'abord que, puisque $n \geq 1$, on a $2 \leq n + 1$ d'où l'on déduit
$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n + 1) \times n! \leq (n + 1)!$$
Pour l'inégalité de droite, on part de l'hypothèse de récurrence et on multiplie par $(n+1)$, pour obtenir
$$(n + 1)! \leq (n + 1)n^n.$$
Or, $n \leq n + 1$ et donc $n^n \leq (n + 1)^n$. On en déduit que
$$(n + 1)! \leq (n + 1) \times (n + 1)^n = (n + 1)^{n+1}.$$
$\mathcal{P}(n + 1)$ est donc vérifiée, ce qui prouve, par récurrence, l'inégalité voulue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 - Limite de validité - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Soit $n \geq 3$ tel que P_n est vraie. On a alors
$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2.$$
Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n + 1)^2 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0$. On calcule le discriminant de ce dernier polynôme, on fait son tableau de signes et on s'aperçoit qu'il est toujours positif pour $n \geq 3$. Ceci montre bien P_{n+1}.
2. Il faut faire attention, car P_3 est fausse ! On ne peut donc pas en déduire que P_n est vraie pour $n \geq 3$. D'ailleurs, P_4 est fausse, mais P_5 est vraie. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour $n \geq 5$. Pour les premières valeurs de n, on constate également que P_0 et P_1 sont vraies.

Exercice 7 - Plusieurs paramètres ? - *L1/Math Sup* - ⋆

1. La récurrence ne peut porter que sur un seul paramètre, entier de surcroît. Elle porte donc sur n.
2. P_n : Pour tout $x>0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.
3. Vérification immédiate en développant.
4. **Initialisation :** Montrons que P_0 est vraie. Soit $x>0$. On a
$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$$
ce qui prouve bien P_0.

Hérédité : Supposons P_n vraie et prouvons P_{n+1}. Soit $x>0$. On a
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$
puisque $nx^2 \geq 0$.

Exercice 8 - Une décomposition des entiers - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On va prouver l'existence par récurrence **forte**. Le résultat est en effet vrai pour $n=1$, il suffit de prendre $p=q=0$. Supposons maintenant que **tout entier inférieur ou égal à** n vérifie cette propriété, et prouvons qu'elle est encore vérifiée pour $n+1$. On distingue alors deux cas :

1. ou bien n est pair : dans ce cas, $n=2m$, et $m \in \{1,\dots,n\}$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et donc m s'écrit $m=2^a(2b+1)$, avec $a,b\in\mathbb{N}$. Mais alors $n=2^{a+1}(2b+1)$, et donc l'existence est démontrée avec $p=a+1$ et $q=b$.
2. ou bien n est impair : alors $n=2m+1=2^0(2m+1)$, et la proposition est démontrée pour $p=0$ et $q=m$.

Ainsi, l'existence de la décomposition est établie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.
Prouvons désormais l'unicité. Supposons que $n=2^p(2q+1)=2^a(2b+1)$. Si $p\geq a$, alors $2^{p-a}(2q+1)=2b+1$ et le terme de droite est impair. Celui de gauche l'est aussi, et donc $p=a$. On en déduit donc que $q=b$ également, ce qui prouve l'unicité.

Manipulation du symbole somme

Exercice 9 - Avec des factorielles - *L1/Math Sup* - ⋆

On peut procéder par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$(n+1)!\sum_{k=1}^n k!$. Alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie, car $2!\geq 1!$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}^*$. Alors on a
$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^n k!.$$
Ajoutons $(n+1)!$ aux deux membres de cette inégalité. On trouve
$$\sum_{k=1}^{n+1} k! \leq 2(n+1)!.$$
Il reste juste à remarquer que pour $n\geq 1$, on a $2(n+1)!\leq(n+2)!$. En effet, $(n+2)\geq 2$, et donc $(n+2)!\geq 2(n+1)!$. On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée, et donc, par récurrence, on a prouvé l'inégalité pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 10 - **Somme des entiers, des carrés,...** - *L1/Math Sup* - $\star$

On procède simplement par récurrence sur n. Voyons d'abord pourquoi la formule est vraie pour a_n. Elle est vraie pour $n = 0$ (une somme vide est par convention égale à 0). Supposons qu'elle est vraie au rang n et prouvons-la au rang $n + 1$. Alors,

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \times \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$ et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.
Le raisonnement est rigoureusement identique pour b_n et pour c_n. Voyons par exemple le cas de c_n. Comme précédemment, la formule est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, alors

$$c_{n+1} = c_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right).$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer que

$$\frac{n^2}{4} + (n+1) = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ ce qui clôt la démonstration par récurrence.

Exercice 11 - **Une somme** - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Initialisation : On commence par vérifier la propriété pour $n = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k = -1 \text{ et } \frac{(-1)^1(2 \times 1 + 1) - 1}{4} = -1$$

ce qui prouve bien l'égalité voulue.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et prouvons-là au rang $n + 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(-2n - 1 + 4n + 4) - 1}{4} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1) + 1) - 1}{4}
\end{aligned}$$

ce qui démontre bien la propriété au rang $n+1$. Remarquons que le passage de la première à la deuxième ligne utilise l'hypothèse de récurrence.

Exercice 12 - **Sommes doubles** - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. On écrit que

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij &= \sum_{j=1}^n j\left(\sum_{i=1}^j i\right)\\ &= \sum_{j=1}^n ja_j\\ &= \sum_{j=1}^n j\frac{j(j+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n j^3+\sum_{j=1}^n j^2\right)\\ &= \frac{c_n+b_n}{2}.\end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs données dans l'énoncé et après réduction au même dénominateur, on trouve

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

2. Posons, pour i fixé, $S_i=\sum_{j=1}^n \min(i,j)$ et commençons par calculer la valeur de S_i. Alors on a

$$\begin{aligned}S_i &= \sum_{j=1}^i j+\sum_{j=i+1}^n i\\ &= \frac{i(i+1)}{2}+(n-i)i\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)i-\frac{i^2}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \min(i,j) &= \sum_{i=1}^n S_i\\ &= \sum_{i=1}^n \left(n+\frac{1}{2}\right)i-\frac{i^2}{2}\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$