

ÉQUATIONS DES CONIQUES

**Exercice 1 - Réduction de l'équation d'une conique - L2/Math Sup - \***

1. Le discriminant de cette conique est  $-3$ . Elle est donc du genre ellipse. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant  $x^2$  et  $y^2$  sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle  $\pi/4$ , soit en posant :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2/3} = 1.$$

On obtient donc une ellipse centrée en 0, de demi-grand axe  $a = \sqrt{2}$  et de demi-petit axe  $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ . Les axes de l'ellipse sont les axes  $(OX)$  et  $(OY)$ , c'est-à-dire dans le repère initial les droites  $y = x$  et  $y = -x$ .

2. Le discriminant de cette conique vaut  $3/4 > 0$ . Elle est donc du genre hyperbole. On élimine les termes en  $xy$  par rotation du repère. On fait une rotation d'angle  $\theta$  tel que

$$\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} = \sqrt{3}$$

soit une rotation d'angle  $\pi/6$ . On obtient alors

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(X\sqrt{3} - Y) \\ y &= \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{3}). \end{cases}$$

On obtient après simplifications l'équation

$$\frac{3}{4}X^2 - \frac{1}{4}Y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}X - \frac{Y}{4} = 1.$$

En reconnaissant le début du développement de deux carrés, on trouve

$$\frac{3}{4} \left( X + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( Y + \frac{1}{2} \right)^2 = 1.$$

On a donc une hyperbole dont le centre a pour coordonnées dans le nouveau repère  $(-\sqrt{3}/6; -1/2)$  et dont les asymptotes sont les droites d'équation  $Y = \pm 3X$  ( $a = 4/3$ ,  $b = 4$ ,  $b/a = 3$ ).

3. Le discriminant de cette conique est  $4 - 4 \times 0 = 4 > 0$ . Elle est donc du genre hyperbole. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant  $x^2$

## Exercices - Coniques : corrigé

---

et  $y^2$  sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle  $\pi/4$ , soit en posant :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$X^2 - Y^2 + 2X + 2Y = 1.$$

On reconnaît le début du développement d'un carré, et la relation précédente s'écrit

$$(X + 1)^2 - (Y - 1)^2 = 1.$$

On a donc une hyperbole, de centre  $(-1, 1)$  dans le nouveau repère (c'est-à-dire  $(-\sqrt{2}, 0)$  dans l'ancien), d'asymptotes les droites d'équation  $(Y - 1) = \pm(X + 1)$ .

4. Le discriminant de cette conique vaut 0 : elle est du genre parabole. On élimine les termes en  $xy$  par rotation du repère. On fait une rotation d'angle  $\theta$  tel que

$$\tan(2\theta) = \frac{b}{a - c} = \sqrt{3}$$

soit une rotation d'angle  $\pi/6$ . On obtient alors

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(X\sqrt{3} - Y) \\ y &= \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{3}). \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation on obtient, après simplifications,

$$\begin{aligned} Y^2 - 6X + 2Y + 13 = 0 &\iff (Y + 1)^2 - 1 - 6X + 13 = 0 \\ &\iff (Y + 1)^2 = 6(X - 2). \end{aligned}$$

On obtient une parabole de sommet ayant pour coordonnées  $(2, -1)$  dans le nouveau repère, et de paramètre 3.

### Exercice 2 - Une conique à paramètres - L2/Math Sup - \*\*

1. Le discriminant de la conique vaut  $\Delta = (2a)^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$ . La conique est donc du type ellipse si  $|a| < 1$ , du type parabole si  $|a| = 1$ , du type hyperbole si  $|a| > 1$ . Dans tous les cas, on peut réduire l'équation de la conique en effectuant une rotation du repère d'angle  $\pi/4$ , soit en posant

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

L'équation de la conique devient

$$(1 + a)X^2 + (1 - a)Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - a^2 = 0.$$

2. On obtient une parabole lorsque  $a = \pm 1$ .

## Exercices - Coniques : corrigé

---

- Si  $a = 1$ , une translation  $X' = X + \sqrt{2}/2$  et  $Y' = Y + \sqrt{2}/2$  donne l'équation réduite de la parabole  $X'^2 = \sqrt{2}Y'$ . On en déduit le paramètre  $p = \sqrt{2}/2$ , le foyer  $X'_F = 0$ ,  $Y'_F = \sqrt{2}/4$ , soit  $x_F = -1/4$  et  $y_F = -3/4$ , la directrice  $x - y = 2$ .
  - Si  $a = -1$ , on effectue la translation  $X' = X$  et  $Y' = Y + \sqrt{2}/2$  et on obtient l'équation réduite  $Y'^2 = \sqrt{2}X'$ . On en déduit le paramètre  $p = \sqrt{2}/2$ , le foyer  $x_F = -1/4$ ,  $y_F = 3/4$  et la directrice  $x + y = 3/2$ .
3. On obtient un cercle lorsque  $|a| < 1$  (type ellipse) et lorsque  $1 + a = 1 - a$ , soit  $a = 0$ . L'équation devient

$$X^2 + Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0 \iff (X + \sqrt{2})^2 + (Y - \sqrt{2})^2 = 4.$$

On obtient alors un cercle de centre  $\Omega$  avec  $X_\Omega = -\sqrt{2}$  et  $Y_\Omega = \sqrt{2}$ , et de rayon 2.

4. Pour obtenir deux droites, il faut être du type hyperbole, c'est-à-dire vérifier  $|a| > 1$ . Pour déterminer s'il s'agit de la réunion de deux droites, il faut encore simplifier l'équation :

$$\begin{aligned} & (1+a)X^2 + (1-a)Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - a^2 = 0 \\ \iff & (1+a) \left( X + \frac{\sqrt{2}}{1+a} \right)^2 + (1-a) \left( Y - \frac{\sqrt{2}}{1-a} \right)^2 = a^2 + \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1-a} \\ \iff & (1+a) \left( X + \frac{\sqrt{2}}{1+a} \right)^2 + (1-a) \left( Y - \frac{\sqrt{2}}{1-a} \right)^2 = \frac{-a^4 + a^2 + 4}{1-a^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc la réunion de deux droites si et seulement si  $|a| > 1$  et  $-a^4 + a^2 + 4 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement  $a = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$ .

### Exercice 3 - Ensemble des sommets d'une famille d'ellipse - L2/Math Sup - ★★

L'équation réduite de l'ellipse est :

$$\lambda \left( x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 + \lambda y^2 = 1.$$

Son centre est le point  $\Omega(1/\lambda, 0)$ , qui parcourt donc la demi-droite  $[Ox)$  lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}_*$ . Les sommets situés sur  $[Ox)$  (pour lesquels  $y = 0$ ), sont les points  $O$  et  $A(2/\lambda, 0)$ .  $A$  parcourt lui aussi la demi-droite  $[Ox)$ . Les sommets pour lesquels  $x = 1/\lambda$  sont les points

$$B \left( \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \text{ et } C \left( \frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Il décrivent la parabole d'équation  $y = x^2$ . Pour décrire les foyers, il faut distinguer le cas  $\lambda \geq 1$ , pour lequel  $\lambda^2 > \lambda$  et le cas  $\lambda < 1$ , pour lequel  $\lambda^2 < \lambda$ . Pour  $\lambda > 1$ , la distance focale vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

et les foyers (qui sont situés sur l'axe vertical de l'ellipse) sont les points

$$F \left( \frac{1}{\lambda}, \sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \text{ et } F' \left( \frac{1}{\lambda}, -\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}} \right).$$

## Exercices - Coniques : corrigé

---

Ils décrivent le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - x = 0$ . Pour  $\lambda < 1$ , la distance focale vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}$$

et les foyers (qui sont situés sur l'axe horizontal de l'ellipse) sont les points

$$F\left(\frac{1}{\lambda} + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}, 0\right) \text{ et } F'\left(\frac{1}{\lambda} - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}, 0\right).$$

Ils décrivent dans ce cas l'axe  $[Ox)$ .

### Exercice 4 - En coordonnées polaires - L2/Math Sup - \*\*

Pour les quatre exemples, on va se ramener à l'équation polaire d'une conique de la forme

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \phi)}.$$

Les sommets se trouvent aux points obtenus lorsque  $\theta = \phi$  et  $\theta = \phi + \pi$ .

1. Il suffit de factoriser par deux au dénominateur, et la conique a pour équation

$$\rho(\theta) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}.$$

On obtient une conique d'excentricité  $1/2$ , c'est donc une ellipse. Les sommets sont les points de coordonnée polaire ( $\theta = 0, \rho = \frac{1/2}{1+1/2} = 1/3$ ) et ( $\theta = \pi, \rho = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ ), c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes  $(1/3, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

2. On applique la même méthode, mais il faut encore remarquer que  $-\cos(\theta) = \cos(\theta + \pi)$ . La conique a donc pour équation

$$\rho(\theta) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2} \cos(\theta + \pi)}.$$

C'est une ellipse d'excentricité  $1/2$ . Ces sommets ont pour coordonnées polaires ( $\theta = \pi, \rho = \frac{1/2}{1+1/2} = 1/3$ ) et ( $\theta = 0, \rho = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ ), c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes  $(-1/3, 0)$  et  $(1, 0)$ .

3. Cette fois, il faut transformer le sinus en cosinus, ce que l'on fait grâce à la relation  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$ . La conique a donc pour équation

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + \cos(\theta - \pi/2)}.$$

C'est une parabole, d'excentricité  $1$ . Son sommet est atteint pour  $\theta = \pi/2$ , où  $\rho(\theta) = \frac{1}{1+1}$ . Ceci correspond au point de coordonnées cartésiennes  $(0, 1)$ .

4. On transforme la somme :

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4).$$

L'équation de la conique est donc :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)}.$$

## Exercices - Coniques : corrigé

---

Il s'agit cette fois d'une hyperbole, d'excentricité  $\sqrt{2}$ . Ses sommets sont atteints en  $\theta = \pi/4$ , avec  $\rho = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$  et  $\theta = 5\pi/4$ , avec  $\rho = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ . Les coordonnées cartésiennes de ces sommets sont respectivement :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

et

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \quad y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

### PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES CONIQUES

#### Exercice 5 - Projections orthogonales sur les axes d'une hyperbole - L2/Math Sup - \*\*

Dans un repère orthonormé, l'équation réduite de l'hyperbole est  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Les axes de l'hyperbole sont  $(D)$  d'équation  $y = -\frac{b}{a}x$  soit  $bx + ay = 0$  et  $(D')$  d'équation  $y = \frac{b}{a}x$ , soit  $-bx + ay = 0$ . Soit  $M(x, y)$  un point de  $\mathcal{H}$ . Le produit  $MH \times MH'$  est encore égal à

$$\text{dist}(M, (D)) \times \text{dist}(M, (D')).$$

Or, on a des formules pour calculer ces distances :

$$\text{dist}(M, (D)) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \text{dist}(M, (D')) = \frac{|-bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On en déduit que

$$MH \times MH' = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2 + b^2}.$$

On conclut en utilisant que  $M$  est un point de l'hyperbole, et donc que

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

On a donc prouvé que, pour tout point  $M$  de l'hyperbole,

$$MH \times MH' = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

#### Exercice 6 - Le miroir parabolique - L2/Math Sup - \*\*

1. On travaille dans le repère adapté à la parabole, c'est-à-dire le repère orthonormé pour lequel le foyer a pour coordonnées  $(p/2, 0)$  et la directrice a pour équation  $x = -p/2$ . Alors, la parabole a pour équation  $y^2 = 2px$ . Soit  $t > 0$  tel que  $M$  soit de coordonnées  $(t^2/2p, t)$ . Alors  $H$  a pour coordonnées  $(-p/2, t)$ . La médiatrice de  $[FH]$  est l'ensemble des points équidistants de  $F$  et de  $H$ . L'égalité  $AF^2 = AH^2$ , pour  $A$  de coordonnées  $(x, y)$ , se traduit en

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2 + (y - t)^2 \iff -2px + 2yt - t^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation de la tangente au point  $M$ .

## Exercices - Coniques : corrigé

2. Puisque la tangente en  $M$  est la médiatrice de  $[FH]$ , les demi-droites  $[HF)$  et  $(M, \vec{N})$  sont parallèles. On en déduit que les angles  $(\vec{MI}, \vec{N})$  et  $(\vec{HM}, \vec{HF})$  sont égaux, ainsi que les angles  $(\vec{FH}, \vec{FM})$  et  $(\vec{N}, \vec{MF})$ . Or, le triangle  $FMH$  est isocèle en  $M$ , et donc  $(\vec{FH}, \vec{FM}) = (\vec{HM}, \vec{HF})$ .

Ce principe est utilisé dans les "paraboles" qui concentrent les signaux émis par un satellite.

### Exercice 7 - Triangle inscrit dans une ellipse - L2/Math Sup - ★★

Dans un repère (centré en  $O$ ), l'ellipse admet une représentation paramétrée de la forme

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{cases}$$

On suppose que  $M$  a pour coordonnées  $(a \cos t, b \sin t)$  et que  $P$  a pour coordonnées  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ . On commence par chercher une relation entre  $t$  et  $\theta$  exprimant que la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $P$  est parallèle à  $(OM)$ . Pour cela, on remarque que la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $P$  a pour vecteur directeur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \end{pmatrix}$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{OM}$  sont colinéaires, et donc leur déterminant est nul. On trouve :

$$ab \cos t \cos \theta + ab \sin t \sin \theta = ab \cos(t - \theta) = 0.$$

En particulier,  $t = \theta + \pi/2$  [ $\pi$ ]. Calculons maintenant l'aire du triangle  $MOP$ . Elle vaut :

$$\frac{1}{2} |\det(\vec{OM}, \vec{OP})| = \frac{1}{2} |ab \cos t \sin \theta - ab \cos \theta \sin t| = \frac{ab}{2} |\sin(t - \theta)| = \frac{ab}{2}$$

puisque  $t - \theta = \pi/2$  [ $\pi$ ].

### Exercice 8 - Ellipses concentriques - L2/Math Sup - ★★

1. Rappelons que la tangente à l'ellipse au point  $(x_0, y_0)$  a pour équation  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$ . Si on suppose que la droite  $D$  d'équation  $ux + vy + w = 0$  est tangente à l'ellipse, il existe donc un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $D$  est aussi la droite d'équation  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$ . Ces deux équations de droite sont proportionnelles, et on en déduit  $w \neq 0$  et  $\frac{u}{w} = -\frac{x_0}{a^2}$  et  $\frac{v}{w} = -\frac{y_0}{b^2}$ . Mais le point  $(x_0, y_0)$  est sur l'ellipse, et donc  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ . Utilisant la relation précédente, on en déduit que  $a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2 = 0$ . Réciproquement, si  $a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2 = 0$  et  $w \neq 0$ , alors, s'inspirant de la preuve du sens direct, on pose  $x_0 = -\frac{a^2 u}{w}$  et  $y_0 = -\frac{b^2 v}{w}$ . Alors on vérifie facilement que  $(x_0, y_0)$  est un point de  $\mathcal{E}$ , et que la droite  $D$  a aussi pour équation  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$ .

2. La droite  $(AB)$  a pour équation

$$b(\sin(b) - \sin(a))x - a(\cos(b) - \cos(a))y - 2ab \sin(b - a) = 0.$$

D'après la question précédente,  $(AB)$  tangente à  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \iff a^2 b^2 (\sin(b) - \sin(a))^2 + a^2 b^2 (\cos(b) - \cos(a))^2 - 4a^2 b^2 \sin^2(b - a) &= 0 \\ \iff 2 \cos^2(b - a) - \cos(b - a) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Or, le polynôme  $2x^2 - x - 1$  admet pour seules racines 1 et  $-1/2$ . La droite  $(AB)$  est tangente à  $\mathcal{E}$  si et seulement  $\cos(b - a) = -1/2$  (le cas  $\cos(b - a) = 1$  est à exclure puisque les points sont distincts), et donc on a  $b - a = 2\pi/3$  [ $2\pi$ ] ou  $b - a = -2\pi/3$  [ $2\pi$ ].

3. On écrit  $M(2 \cos(m), 2 \sin(m))$ ,  $P(2 \cos(p), 2 \sin(p))$  et  $Q(2 \cos(q), 2 \sin(q))$ . D'après la question précédente, on a, quitte à échanger le rôle de  $M$  et  $P$ ,  $m - p = 2\pi/3 [2\pi]$ . Puisque  $P \neq Q$ , on a alors  $m - q = -2\pi/3 [2\pi]$ . On en déduit que  $q - p = 4\pi/3 = -2\pi/3 [2\pi]$ , et donc la droite  $(PQ)$  est tangente à l'ellipse.

**Exercice 9 - Cercle orthoptique d'une ellipse - L2/Math Sup - ★★★**

1. Soit  $y = mx + p$  une telle droite. On cherche les points d'intersection de cette droite avec l'ellipse  $\mathcal{E}$ . Pour cela, on introduit cette relation dans l'équation de l'ellipse, et on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2 x^2 + 2mpx + p^2}{b^2} = 1 \iff (b^2 + a^2 m^2)x^2 + 2a^2 mpx + (a^2 p^2 - a^2 b^2) = 0.$$

Pour que la droite soit tangente, cette équation doit avoir une unique solution, et donc son discriminant doit être nul. On trouve

$$\begin{aligned} \Delta' &= a^4 m^2 p^2 - (a^2 p^2 - a^2 b^2)(b^2 + a^2 m^2) \\ &= -a^2 p^2 b^2 + a^2 b^4 - a^4 m^2 b^2 \end{aligned}$$

et ceci est nul si et seulement si

$$p = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

2. C'est du cours. C'est vrai si et seulement si  $mm' = -1$  (ce qui peut se retrouver en écrivant un vecteur directeur de chaque droite et en écrivant qu'ils doivent être orthogonaux).  
3. Soit

$$\begin{aligned} y &= mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2} \\ y &= -\frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2} \end{aligned}$$

deux droites tangentes à l'ellipse qui sont orthogonales. On cherche leur point d'intersection. En mettant les équations au carré, on trouve

$$\begin{aligned} (y - mx)^2 &= b^2 + a^2 m^2 \\ (mx + y)^2 &= a^2 + b^2 m^2. \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on trouve

$$(m^2 + 1)x^2 + (m^2 + 1)y^2 = (m^2 + 1)(a^2 + b^2)$$

et donc le point d'intersection est nécessairement sur le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Réciproquement, tout point de cercle convient, il suffit de le vérifier (mais c'est un peu pénible...).

**LIEUX GÉOMÉTRIQUES**

### Exercice 10 - Carré des distances aux trois côtés d'un triangle - L2/Math Sup - \*

1. Soit  $M(x, y)$  un point du plan. La distance de  $M$  à
- $(OA)$  vaut  $|y|$  ;
  - $(OB)$  vaut  $|x|$  ;
  - $(AB)$  vaut  $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$  (une équation de la droite  $(AB)$  étant  $x + y - 1 = 0$ ).

On fait la somme des carrés de ces trois distances, et on trouve que  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  vérifiant

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 2y = -\frac{1}{3}.$$

On reconnaît l'équation d'une conique qui est une ellipse car son discriminant vaut  $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32$  et est donc strictement négatif. Pour déterminer l'équation réduite de  $\mathcal{E}$ , on remarque que les coefficients devant  $x^2$  et  $y^2$  sont identiques. Ceci incite à faire un changement de repère par rotation de  $\pi/4$ , et donc les nouvelles coordonnées  $(X, Y)$  de  $M$  sont liées aux anciennes par la relation :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

L'équation de  $\mathcal{E}$  devient

$$4X^2 + 2Y^2 - 2\sqrt{2}X = -\frac{1}{3}$$

soit, en regroupant les termes en  $X$  sous forme canonique, puis en multipliant les deux membres par 6 :

$$24 \left( X - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + 12Y^2 = 1.$$

On obtient donc une ellipse de centre  $\Omega$  dont les coordonnées, dans le nouveau repère, sont  $\left( \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right)$ , soit, dans l'ancien repère,  $\left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$ . Son demi-grand axe vaut  $1/\sqrt{12}$ , et son demi-petit axe vaut  $1/\sqrt{24}$ .

2. Cherchons les points d'intersection de  $\mathcal{E}$  avec l'axe  $(Ox)$ . Dans le repère initial, ces points ont pour coordonnée  $(x, 0)$  et on doit résoudre l'équation

$$3x^2 - 2x + 1/3 = 0.$$

Son discriminant est nul, donc l'équation admet une racine double,  $x = 1/3$ . L'ellipse  $\mathcal{E}$  est donc tangente à  $(Ox)$  au point  $(1/3, 0)$ . Par symétrie de l'ellipse par rapport à la droite  $y = x$  (ou par symétrie du problème), on en déduit que l'ellipse est tangente à l'axe  $(Oy)$  au point  $(0, 1/3)$ .

3. Dans le nouveau repère, on peut paramétrer l'ellipse par

$$\begin{cases} X(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} \cos t \\ Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{24}} \sin(t). \end{cases}$$

En utilisant les formules de changement de repère, on trouve dans l'ancien repère, après simplifications,

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin t \\ y(t) &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{12} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin t. \end{cases}$$

**Exercice 11 - Lieu des centres d'un cercle - L2/Math Sup - \*\***

Soit  $C(x, y)$  un tel point et soit  $D$  le point de tangence du cercle à l'axe  $(Ox)$ . Alors  $CD = CM = CM' = x$ . Soit  $I(x, 0)$  le projeté orthogonal de  $C$  sur l'axe  $(Ox)$ .  $I$  est aussi le milieu de  $[MM']$ . Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle  $MIC$ , rectangle en  $I$ . On a

$$y^2 + (a/2)^2 = x^2 \implies y^2 - x^2 = -a^2/4.$$

Le point  $C$  appartient donc à l'hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = a^2/4$ . Réciproquement, si  $C$  est un point de cette hyperbole, ses coordonnées sont de la forme

$$C = \left( \pm \sqrt{x^2 - a^2/4} \right).$$

Alors les points  $M(x - a, 0)$  et  $M'(x + a, 0)$  appartiennent au cercle de centre  $C$  et de rayon  $x$ . Ce cercle est tangent à  $(Oy)$  et  $MM' = a$ . Ainsi, on a bien prouvé que l'ensemble recherché est exactement l'hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = a^2/4$ .

**Exercice 12 - - L2/Math Sup - \*\***

On va travailler dans un repère orthonormé où les calculs seront le plus facile possible. Par exemple, on va prendre un repère orthonormé de centre  $I$  tel que  $A$  a pour coordonnée  $(a, 0)$  et  $B$  a pour coordonnée  $(-a, 0)$ . Soit  $M(x, y)$ . Alors

$$MI^2 = MA \times MB \iff MI^4 = MA^2 \times MB^2$$

(tout est positif). Or,

$$MI^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2.$$

$$MA^2 \times MB^2 = x^4 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4.$$

On a donc

$$MI = MA \times MB \iff -2a^2x^2 + a^4 + 2a^2y^2 = 0 \iff \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère.