

### FONCTIONS LOGARITHME, EXPONENTIELLE, PUISSANCE

**Exercice 1 - Equation** - *L1/Math Sup* - ★

Ecrire sous forme exponentielle et utiliser l'injectivité de la fonction exponentielle.

**Exercice 2 - Simplifier!** - *L1/Math Sup* - ★

Passer à la forme exponentielle!

**Exercice 3 - Étude de fonction** - *L1/Math Sup* - ★

Écrire la fonction en utilisant l'exponentielle, déterminer le domaine de définition de  $f$ , calculer sa dérivée, tracer la fonction.

**Exercice 4 - Calcul de limites** - *L1/Math Sup* - ★★

1. Ecrire sous forme exponentielle et factoriser par  $x^x$ .
2. Prendre le logarithme et factoriser par  $b^x$ .
3. Prendre le logarithme et factoriser par  $a^x$  (le terme dominant).

**Exercice 5 - Racine d'une somme de puissances** - *L1/Math Sup* - ★★

1. Étudier la fonction  $x \mapsto \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_p}{a}\right)^x$ .
2. Reprendre la fonction précédente avec  $a < b$ .
3. La fonction est décroissante et positive. Passer à la limite dans l'égalité définissant  $x_a$ .

**Exercice 6 - Equation diophantienne** - *L1/Math Sup* - ★★★

Se ramener à l'étude de la fonction  $x \mapsto \ln(x)/x$ .

### FONCTIONS HYPERBOLIQUES

**Exercice 7 - Tangente hyperbolique** - *L1/Math Sup* - ★

Passer par l'exponentielle.

**Exercice 8 - Somme de cosinus hyperbolique** - *L1/Math Sup* - ★

Utiliser la forme exponentielle et la somme d'une série géométrique.

**Exercice 9 - Equation** - *L1/Math Sup* - ★

Se ramener à une équation du second degré.

**Exercice 10 - Étude de fonctions** - *L1/Math Sup* - ★

- 1.
2. Pour la limite en  $+\infty$ , poser  $y = 1/x$  et se ramener à une limite connue. Pour la limite en 0, utiliser des croissances comparées.
- 3.
4. Etudier la fonction auxiliaire  $g(y) = \tanh(y) - y$ .

### FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

#### Exercice 11 - Valeur exacte - *L1/Math Sup* - ★

L'erreur à ne pas faire est de croire que  $\arccos \cos x = x$ . Ceci n'est vrai que si  $x \in [0, \pi]$ . Il faut donc se ramener, par périodicité et parité du cosinus, à se ramener à l'intervalle  $[0, \pi]$ .

#### Exercice 12 - Simplifier ! - *L1/Math Sup* - ★

Utiliser  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  pour la première et la deuxième expression, et pour la troisième,  $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ .

#### Exercice 13 - Simplifier ! - *L1/Math Sup* - ★

1. Chercher les  $x$  tels que  $-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$ .
2. Prendre  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ , utiliser les formules de trigo et la définition de arcsin. Faire attention à être dans le bon intervalle !

#### Exercice 14 - Simplifier ! - *L1/Math Sup* - ★★

1. Utiliser  $\cos(2u) = 1 - \cos^2 u$  ;
2. Poser  $x = \tan t$ .

#### Exercice 15 - Presque du cours - *L1/Math Sup* - ★

Ecrire sous la forme  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$  et appliquer la fonction cosinus (en justifiant !) Ou bien dériver.

#### Exercice 16 - Etude de fonctions - *L1/Math Sup* - ★

1. Prendre le carré.
2. Préciser l'intervalle de définition, dériver et étudier le signe de la dérivée à l'aide de la question précédente.

#### Exercice 17 - Existence de solutions - *L1/Math Sup* - ★★

1. L'équation admet des solutions (en fait, une seule) si et seulement si

$$\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a + \arcsin b \leq \frac{\pi}{2}.$$

Distinguer alors suivant le signe de  $\arcsin a$  et  $\arcsin b$ . Dans le cas où ils sont tous deux positifs, utiliser la croissance du sinus.

2. Raisonement semblable.

#### Exercice 18 - Équations - *L1/Math Sup* - ★★

1. Prendre le sinus et bien fonctionner par équivalence.
2. Idem.

## Exercices - Fonctions usuelles : indications

---

3. Prendre la tangente des deux membres et utiliser la formule  $\tan(a + b) = \dots$ . Attention, on n'obtient pas une équation équivalente, il faut vérifier si les solutions obtenues sont bien des solutions de l'équation initiale.
4. Poser  $x = \sin \theta$ .
5. Minorer  $\arctan 2 + \arctan 3$ .

### Exercice 19 - Calcul d'une somme - *L1/Math Sup* - \*\*

Utiliser la formule de trigonométrie pour  $\tan(a + b)$  pour simplifier l'expression demandée.

### Exercice 20 - Suite - *L1/Math Sup* - \*\*

1. Prendre la tangente et vérifier qu'on est dans le bon intervalle!
2. C'est une somme télescopique!

### Exercice 21 - Sommes remarquables - *L1/Math Sup* - \*\*

Dériver les fonctions pour prouver qu'elles sont constantes! Déterminer la constante en étudiant des points particuliers, ou des limites.

### Exercice 22 - Fonction implicite - *L1/Math Sup* - \*\*

### Exercice 23 - Polynômes de Chebychev - *L1/Math Sup* - \*\*

Procéder par récurrence simultanée sur  $f_n$  et  $g_n$ .