

Exercices - Topologie en algèbre linéaire et dans les espaces de matrices : corrigé

Exercice 1 - Majoration de valeur propre - *Math Spé* - ★

Soit x un vecteur propre. On a :

$$|\lambda|\|x\| = \|f(\lambda x)\| \leq \|f\|\|x\|,$$

ce qui prouve le résultat puisque $\|x\| \neq 0$.

Exercice 2 - Ensemble des matrices inversibles - *Math Spé* - ★★

L'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice). En outre,

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

Ainsi, cet ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert. Prouvons qu'il est dense. Une matrice M n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \rho$ entraîne que $M - \lambda I$ est inversible. En outre, si $\lambda \rightarrow 0$, $M - \lambda I \rightarrow M$, et donc M est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 3 - Ensemble des matrices orthogonales - *Math Spé* - ★★

Il suffit de prouver que cet ensemble est fermé et borné, puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2 . Mais cet espace est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé, à savoir I_n , par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$. Il est compact : munissant \mathbb{R}^n de la norme euclidienne canonique, on a :

$$\langle Mx, Mx \rangle = \langle {}^tMMx, x \rangle = \|x\|^2,$$

et donc $\|M\| = 1$.

Exercice 4 - Polynômes caractéristiques - *L2/Math Spé* - ★★

1. On a $BA = A^{-1}ABA$ et donc la propriété est vraie avec $P = A$. Les matrices AB et BA sont donc semblables. Elles ont le même polynôme caractéristique.
2. Puisque t n'est pas valeur propre de A , la matrice $A - tI_n$ est inversible. Ceci est donc une application directe de la question précédente.
3. Les fonctions $t \mapsto A - tI_n$, $(C, D) \mapsto CD$ (produit matriciel) et $M \mapsto \det M$ sont continues. Les fonctions f et g sont donc continues comme composées de fonctions continues. Si A est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique, ce qui se traduit par $f(0) = g(0)$. Sinon, puisque A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, r[$, t n'est pas valeur propre de A . D'après la question précédente, $(A - tI_n)B$ et $B(A - tI_n)$ ont le même polynôme caractéristique. Ceci signifie que $f(t) = g(t)$. On fait ensuite tendre vers t vers 0 et on utilise la continuité de f et g .
4. L'identité $f(0) = g(0)$ signifie exactement que les deux polynômes caractéristiques sont égaux.

Exercice 5 - Matrices de rang majoré - *L3/Math Spé* - ★★

L'important (et le plus difficile) dans cet exercice est de trouver une bonne caractérisation de ces matrices. Nous allons utiliser la suivante : une matrice est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses déterminants d'ordre $p+1$ sont nuls. On peut commencer par écarter le cas $p = n$, puisque dans ce cas $F_p = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc $p < n$. Pour I, J deux parties de

Exercices - Topologie en algèbre linéaire et dans les espaces de matrices : corrigé

$\{1, \dots, n\}$ de cardinal $p + 1$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on désigne par $M_{I,J}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par $(m_{i,j})_{i \in I, j \in J}$. Alors on a

$$F_p = \bigcap_{I,J} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det(M_{I,J}) = 0\}.$$

Or, les deux applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} g_{I,J} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M_{I,J} \\ \det : \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

On a donc

$$F_p = \bigcap_{I,J} (\det \circ g_{I,J})^{-1}(\{0\}).$$

F_p est donc une intersection d'images réciproques de fermés par une application continue. C'est donc un fermé.

Exercice 6 - Endomorphismes 1-lipschitziens - L3/Math Spé - ★★★

1. Soit $x \in \ker(u - Id_E)^2$, i.e. $u^2(x) = 2u(x) - x$. On prouve par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u^n(x) = nu(x) - (n-1)x.$$

La formule est en effet vérifiée pour $n = 1$, et si elle est vraie au rang n , alors

$$u^{n+1}(x) = nu^2(x) - (n-1)u(x) = n(2u(x) - x) - (n-1)u(x) = (n+1)u(x) - nx.$$

Écrivons ceci sous la forme

$$u^n(x) = n(u(x) - x) - x.$$

Puisque la suite $(u^n(x))$ est bornée (par $\|x\|$), ceci n'est possible que si $u(x) = x$. Donc $x \in \ker(u - Id_E)$ ce qui prouve que $\ker(u - Id_E)^2 \subset \ker(u - Id_E)$. Comme l'autre inclusion est toujours vérifiée, on a égalité.

2. D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que $\ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E) = \{0\}$. En effet, si ceci est vérifié, on aura automatiquement que la somme directe $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$ est de dimension $\dim(E)$, et donc est égale à E . Prenons donc $x \in \ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E)$. On peut alors écrire $x = u(y) - y$, et $u(x) = x$. Il vient $u^2(y) = u(x) + u(y) = x + u(y) = 2u(y) - y$ et donc $y \in \ker(u - Id_E)^2$. D'après la question précédente, y est élément de $\ker(u - Id_E)$ est donc $x = 0$.
3. Prenons $x \in E$ et décomposons le en $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$. On a $u(x_1) = x_1$ tandis que, si $x_2 = u(y) - y$, on a

$$u^k(x_2) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

Il vient

$$u_n(x) = x_1 + \frac{1}{n}(u^n(y) - y) \rightarrow x_1$$

Exercices - Topologie en algèbre linéaire et dans les espaces de matrices : corrigé

lorsque n tend vers $+\infty$ puisque, comme auparavant, la suite $(u^n(y))$ est bornée. Donc, pour chaque x , la suite $(u_n(x))$ converge vers $P(x)$ où P est la projection sur $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - Id_E)$. Mais on veut plus. On veut prouver que $\|u_n - P\| \rightarrow 0$. Introduisons v l'endomorphisme de $\text{Im}(u - Id_E) = F$ induit par u . $v - Id_F$ est inversible (son noyau est restreint à $\{0\}$) et $y = (v - Id_F)^{-1}(x_2)$. Notons aussi Q la projection sur $\text{Im}(u - Id_E)$ parallèlement à $\ker(u - Id_E)$, de sorte que $x_2 = Q(x)$. Le calcul précédent donne alors

$$u_n(x) = P(x) + \frac{1}{n}(u^n(v(Q(x))) - Q(x)).$$

On en déduit :

$$\|u_n(x) - P(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|v\|\|Q\| + \|Q\|) \|x\|$$

i.e.

$$\|u_n - P\| \leq \frac{1}{n} (\|v\|\|Q\| + \|Q\|).$$

Ceci prouve bien que $\|u_n - P\|$ tend vers 0.

Exercice 7 - Matrices diagonalisables - Math Spé - ★★★

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Puisque A est trigonalisable, A s'écrit :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On pose, pour tout k :

$$A_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{3}{k} & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dès que k est assez grand, les nombres $\lambda_i + \frac{i}{k}$ sont tous distincts (si $\lambda_i = \lambda_j$, c'est clair, et si $\lambda_i \neq \lambda_j$, c'est pas non plus très compliqué!). Donc les matrices A_k sont diagonalisables. Et elles tendent évidemment vers A .

Exercice 8 - Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables - L3/Math Spé/Agrégation - ★★★

On va prouver que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables \mathcal{D} de $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont disjointes. Pour cela, on va démontrer deux choses :

1. Soit M une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales. Alors M n'est pas dans l'intérieur de \mathcal{D} . Autrement dit, on peut trouver une suite de matrice (M_p) qui converge vers M et qui ne sont pas diagonalisables. Soit P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercices - Topologie en algèbre linéaire et dans les espaces de matrices : corrigé

Alors, posons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(on peut toujours s'arranger pour que ce soient les deux premières valeurs propres qui sont égales). Alors la suite (M_p) définie par $M_p = PD_pP^{-1}$ converge vers M et chaque M_p n'est pas diagonalisable. Sinon, D_p serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

2. Soit M une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Son polynôme caractéristique χ_M est scindé à racines simples. Par continuité de $A \mapsto \chi_A$ et des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients, il existe un voisinage V de M tel que, pour tout $A \in V$, le polynôme χ_A est scindé à racines simples. Autrement dit, A est diagonalisable. Un voisinage de M est contenu dans \mathcal{D} , donc M est dans l'intérieur de \mathcal{D} .

Exercice 9 - - Oral Mines-Ponts - ★★★

On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme usuelle associée à celle de E :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u\|.$$

$\mathcal{L}(E)$ est ainsi un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrons que H est compact :

- H est borné : en effet, fixons $u \in H$ et soit $x \in E$ avec $\|x\| = 1$. Puisque $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(0, \varepsilon) \in K$. Ceci entraîne $\varepsilon x \in K$. Maintenant, puisque u est continue et que K est compact, il existe $M > 0$ tel que $\|u(y)\| \leq M$ si $y \in K$. On en déduit

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(\varepsilon x)\|}{\varepsilon} \leq \frac{M}{\varepsilon} \|x\|.$$

Ainsi, on a prouvé que $\|u\| \leq \frac{M}{\varepsilon}$.

- H est fermé : soit (u_n) une suite de H qui converge vers u . En particulier, pour tout x dans K , la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$. Maintenant, puisque K est compact, donc fermé, $u(x) \in K$, et $u \in H$.

H étant fermé et borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il est compact. Maintenant, l'application déterminant est continue, et l'image de H par cette application est donc bornée dans \mathbb{R} . Soit $u \in H$. Puisque $u(H) \subset H \implies u^n(H) \subset u^{n-1}(H) \subset \dots \subset H$, u^n est dans H . Mais la suite $\det(u^n) = \det(u)^n$ est bornée. Ceci n'est possible que si $|\det u| \leq 1$.