

**Exercice 1 - Vrai/Faux - L2/Math Spé - ★**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les  $f_n$  sont croissantes, alors  $f$  aussi.
2. Si les  $f_n$  sont strictement croissantes, alors  $f$  aussi.
3. Si les  $f_n$  sont périodiques, alors  $f$  aussi.
4. Si les  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

CONVERGENCE DE SUITES DE FONCTIONS

**Exercice 2 - Premières études de convergence uniforme - L2/Math Spé - ★**

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions  $(f_n)$  suivantes :

1.  $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$  sur  $] - 1, 1[$ , puis sur  $[-a, a]$  avec  $0 \leq a < 1$ .
2.  $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ ,  $f_n(0) = 0$ , sur  $[0, 1]$ .
3.  $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$  sur  $\mathbb{R}^+$  puis sur  $[a, +\infty[$ .

**Exercice 3 - Avec paramètre - L2/Math Spé - ★**

Soit  $a \geq 0$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers 0, mais que la convergence est uniforme si et seulement si  $a < 1$ .

**Exercice 4 - Étude qualitative - L2/Math Spé - ★★**

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$ .

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . En déduire que la suite  $(f_n)$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 5 - - L2/Math Spé - ★★**

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 6 - - L2/Math Spé - ★★**

Soit  $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ .

1. Etudier la convergence simple de  $(f_n)$ .
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle  $] - \infty, b]$ .
3. La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 7 - Une belle bosse - L2/Math Spé - ★★★**

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

CONVERGENCE DE SÉRIES DE FONCTIONS

**Exercice 8 - Exemples et contre-exemples - L2/Math Spé/Agreg interne - \*\***

Pour  $x \geq 0$ , on pose  $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ , mais que la convergence n'y est pas uniforme.
2. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ , mais que la convergence n'est pas normale.

**Exercice 9 - Transformation d'Abel - Math Spé/L2 - \*\*\***

Soit  $u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n(\theta)$  converge uniformément sur tout intervalle  $[a, 2\pi - a]$ , avec  $a \in ]0, \pi[$ .
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 2\pi]$  (on pourra utiliser la théorie des séries de Fourier et notamment le théorème de Parseval).

ETUDE DE LA FONCTION LIMITE

**Exercice 10 - Convergence uniforme et fonctions bornées - L2/Math Spé - \***

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions bornées,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ . Montrer que  $f$  est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

**Exercice 11 - Série alternée - L2/Math Spé - \***

On considère la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

1. Prouver que  $S$  est définie sur  $I = ]-1, +\infty[$ .
2. Prouver que  $S$  est continue sur  $I$ .
3. Prouver que  $S$  est dérivable sur  $I$ , calculer sa dérivée et en déduire que  $S$  est croissante sur  $I$ .
4. Quelle est la limite de  $S$  en  $-1$  ? en  $+\infty$  ?

**Exercice 12 - Fonction zeta - L2/Math Spé - \*\***

On appelle fonction  $\zeta$  de Riemann la fonction de la variable  $s \in \mathbb{R}$  définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de  $\zeta$  et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que  $\zeta$  est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$ .

4. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $s > 0$ , on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que  $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$ .

5. Démontrer que  $\zeta$  est convexe.

6. Tracer la courbe représentative de  $\zeta$ .

**Exercice 13 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - L2/Math Spé - \*\***

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$  et on note  $f$  sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  ?

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. On fixe  $A > 0$ .

(a) Justifier l'existence d'un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

(b) En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

(c) Démontrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 14 - Limite en  $+\infty$  par comparaison à une intégrale - L2/Math Spé - \*\***

Soit la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ .

1. Démontrer que  $S$  définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $x > 0$  et  $n \geq 1$ . Justifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

3. En déduire que  $S$  admet une limite en  $+\infty$  et la déterminer.

**Exercice 15 - Zeta alternée - L2/Math Spé - \*\*\***

On considère la fonction  $\mu(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

1. Quel est le domaine de définition de  $\mu$  ?

2. Montrer que  $\mu$  est de classe  $C^\infty$  sur son domaine de définition.

3. Démontrer que  $\mu$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

4. On souhaite démontrer que  $\mu$  admet une limite en 0.

(a) Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

(b) En déduire que pour tout  $x > 0$ , on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

(c) Conclure.

**Exercice 16 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - Oral Mines-Ponts - \*\*\***

Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} f_n$ , avec  $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ . On note  $S$  sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur  $[0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $S$  n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout  $k$ ,  $S(x) = o(x^{-k})$  en  $+\infty$ .

**Exercice 17 - Limite uniforme de polynômes - Math Spé - \*\***

Soit  $(P_n)$  une suite de polynômes qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$ . Montrer que  $f$  est un polynôme.

### AVEC LA TOPOLOGIE...

**Exercice 18 - Convergence uniforme et composition - L2/Math Spé - \*\***

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles et  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $J$  qui converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g$ . Soit  $f \in C^0(J, \mathbb{R})$  et  $(h_n)$  la suite définie par  $h_n = f \circ g_n$ .

1. Montrer que si  $J$  est un segment, alors la suite  $(h_n)$  converge uniformément.
2. Que se passe-t-il si on ne suppose plus que  $J$  est un segment ?

**Exercice 19 - Un théorème de Dini - L3/Math Spé - \*\*\***

Soit  $(f_n)$  une suite croissante (ie  $f_n \leq f_{n+1}$ ) de fonctions continues sur un segment  $[a, b]$  qui converge simplement vers une fonction  $f$  continue. En utilisant les parties  $K_n$  définies par

$$K_n = \{x \in [a, b]; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

pour  $\varepsilon > 0$  fixé, montrer que la convergence est en fait uniforme.

**Exercice 20 - Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass - L2/Math Spé - \*\*\***

Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le polynôme  $B_n$  de degré  $n$  par :

$$B_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On rappelle que la fonction  $f$ , continue sur  $[0, 1]$ , est uniformément continue, i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta_\varepsilon > 0$  tel que, pour couple  $(x, y) \in [0, 1]^2$  vérifiant  $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$ , on a :  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . On note par ailleurs  $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ .

1. Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , donner une expression simple des quantités suivantes :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ et } \sum_{0 \leq k \leq n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2. Pour  $x \in [0, 1]$ , on pose  $r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ . Montrer que

$$\sum_{0 \leq k \leq n} r_k(x) = 1, \quad \sum_{0 \leq k \leq n} k r_k(x) = nx, \quad \sum_{0 \leq k \leq n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

3. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

4. Pour  $x \in [0, 1]$ , on note  $J(x) = \{0 \leq k \leq n; |k - nx| \leq n\eta_\varepsilon\}$ . Prouver que :

$$\sum_{k \in J(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \varepsilon.$$

5. Prouver que :

$$\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq 2M \sum_{k \in J(x)^c} \frac{(k - nx)^2}{n^2 \eta_\varepsilon^2} r_k(x),$$

puis que

$$\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}.$$

6. En déduire que la suite de polynômes  $B_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

7. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

### Exercice 21 - Lipschitzienne ou convexe - L3/Math Spé - ★★★

- Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  avec  $\alpha < \beta$ ,  $M \geq 0$  et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions  $M$ -lipschitziennes de  $[\alpha, \beta]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  sur  $[\alpha, \beta]$ , la convergence est en fait uniforme.
- Soient  $]a, b[$  un intervalle ouvert, et  $(f_n)$  une suite de fonctions convexes de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge simplement vers  $f$ . Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment inclus dans  $]a, b[$ .

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à [geolabo@bibmath.net](mailto:geolabo@bibmath.net) Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

<http://www.bibmath.net/forums>