

Exercice 1 - Vrai/Faux - L2/Math Spé - ★

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a , alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

CONVERGENCE DE SUITES DE FONCTIONS

Exercice 2 - Premières études de convergence uniforme - L2/Math Spé - ★

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ sur $] - 1, 1[$, puis sur $[-a, a]$ avec $0 \leq a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur \mathbb{R}^+ puis sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3 - Avec paramètre - L2/Math Spé - ★

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 4 - Étude qualitative - L2/Math Spé - ★★

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 5 - - L2/Math Spé - ★★

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 6 - - L2/Math Spé - ★★

Soit $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) .
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $] - \infty, b]$.
3. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice 7 - Une belle bosse - L2/Math Spé - ★★★

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

CONVERGENCE DE SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 8 - Exemples et contre-exemples - L2/Math Spé/Agreg interne - **

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ , mais que la convergence n'y est pas uniforme.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ , mais que la convergence n'est pas normale.

Exercice 9 - Transformation d'Abel - Math Spé/L2 - ***

Soit $u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n(\theta)$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$, avec $a \in]0, \pi[$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2\pi]$ (on pourra utiliser la théorie des séries de Fourier et notamment le théorème de Parseval).

ETUDE DE LA FONCTION LIMITE

Exercice 10 - Convergence uniforme et fonctions bornées - L2/Math Spé - *

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f . Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice 11 - Série alternée - L2/Math Spé - *

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I .
3. Prouver que S est dérivable sur I , calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I .
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 12 - Fonction zeta - L2/Math Spé - **

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.

4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$.

5. Démontrer que ζ est convexe.

6. Tracer la courbe représentative de ζ .

Exercice 13 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - L2/Math Spé - **

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. On fixe $A > 0$.

(a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

(b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

(c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 - Zeta alternée - L2/Math Spé - ***

On considère la fonction $\mu(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?

2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.

(a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

(c) Conclure.

Exercice 15 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - Oral Mines-Ponts - ***

Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout k , $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.

Exercice 16 - Limite uniforme de polynômes - Math Spé - **

Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction f . Montrer que f est un polynôme.

AVEC LA TOPOLOGIE...

Exercice 17 - Convergence uniforme et composition - L2/Math Spé - **

Soient I et J deux intervalles et (g_n) une suite de fonctions de I dans J qui converge uniformément sur I vers une fonction g . Soit $f \in C^0(J, \mathbb{R})$ et (h_n) la suite définie par $h_n = f \circ g_n$.

1. Montrer que si J est un segment, alors la suite (h_n) converge uniformément.
2. Que se passe-t-il si on ne suppose plus que J est un segment ?

Exercice 18 - Un théorème de Dini - L3/Math Spé - ***

Soit (f_n) une suite croissante (ie $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue. En utilisant les parties K_n définies par

$$K_n = \{x \in [a, b]; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 19 - Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass - L2/Math Spé - ***

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :

$$B_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On rappelle que la fonction f , continue sur $[0, 1]$, est uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour couple $(x, y) \in [0, 1]^2$ vérifiant $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On note par ailleurs $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des quantités suivantes :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq k \leq n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que

$$\sum_{0 \leq k \leq n} r_k(x) = 1, \quad \sum_{0 \leq k \leq n} k r_k(x) = nx, \quad \sum_{0 \leq k \leq n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

4. Pour $x \in [0, 1]$, on note $J(x) = \{0 \leq k \leq n; |k - nx| \leq n\eta_\varepsilon\}$. Prouver que :

$$\sum_{k \in J(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \varepsilon.$$

5. Prouver que :

$$\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq 2M \sum_{k \in J(x)^c} \frac{(k - nx)^2}{n^2 \eta_\varepsilon^2} r_k(x),$$

puis que

$$\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}.$$

6. En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

7. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si f est continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 20 - Lipschitzienne ou convexe - L3/Math Spé - ★★★

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha < \beta$, $M \geq 0$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions M -lipschitziennes de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} . Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[\alpha, \beta]$, la convergence est en fait uniforme.

2. Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert, et (f_n) une suite de fonctions convexes de I dans \mathbb{R} qui converge simplement vers f . Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $]a, b[$.

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à geolabo@bibmath.net Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

<http://www.bibmath.net/forums>