Exercice 1 - Vrai/Faux - *L2/Math Spé* - $\star$

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Convergence de suites de fonctions

Exercice 2 - Premières études de convergence uniforme - *L2/Math Spé* - $\star$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x)=1+x+\dots+x^{n-1}$ sur $]-1,1[$, puis sur $[-a,a]$ avec $0\leq a<1$.
2. $f_n(x)=nx^n\ln(x)$, $f_n(0)=0$, sur $[0,1]$.
3. $f_n(x)=e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

Exercice 3 - Avec paramètre - *L2/Math Spé* - $\star$

Soit $a\geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x)=n^ax^n(1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a<1$.

Exercice 4 - - *L2/Math Spé* - $\star$

On pose $f_n:x\mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5 - Étude qualitative - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\dfrac{2^nx}{1+2^nnx^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty}I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 6 - Exemples plus difficiles - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$;
2. $f_n(x)=\sin^n x\ \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 - - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit $f_n(x)=e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n).
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]-\infty, b]$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8 - Une belle bosse - *L2/Math Spé* - $\star\star\star$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Exercice 9 - Suite récurrente - *L2/Math Spé* - $\star\star\star$

On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^n.$$
3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.

CONVERGENCE DE SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 10 - Exemples et contre-exemples - *L2/Math Spé/Agreg interne* - $\star$

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ ne convergence pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11 - CSSA - *Math Spé/L2* - $\star$

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 12 - Uniforme non normale - *Math Spé/L2* - ⋆⋆

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x)=\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x)=\sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x>0$,
$$0\leq R_n(x)\leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$
et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13 - Suite et séries - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0)=0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
   (c) On fixe $\varepsilon>0$. Montrer que l'on peut choisir $a>0$ tel que $|f_n(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $x\in[0,a]$ et pour tout $n\geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0,+\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      (i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      (ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 14 - Transformation d'Abel - *Math Spé/L2* - ⋆⋆⋆

Soit $u_n(\theta)=\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(\theta)$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,2\pi-a]$, avec $a\in\,]0,\pi[$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,2\pi]$ (on pourra utiliser la théorie des séries de Fourier et notamment le théorème de Parseval).

Etude de la fonction limite

Exercice 15 - Série alternée - *L2/Math Spé* - ⋆

On considère la série de fonctions $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I=]-1,+\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 16 - Fonction zeta - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Exercice 17 - Étude - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est dérivable et croissante sur $]0, +\infty[$.
4. Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 18 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$
   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$,
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

(c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 19 - Limite en $+\infty$ par comparaison à une intégrale - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit la série de fonctions $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x>0$ et $n\geq 1$. Justifier que

$$\int_n^{n+1}\frac{x}{x^2+t^2}dt\leq\frac{x}{x^2+n^2}\leq\int_{n-1}^n\frac{x}{x^2+t^2}dt.$$

3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 20 - Abel sans le dire - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t)=\dfrac{1}{n}\,t^n\,\sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a\in]0,1[$.
   (a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) En déduire que la fonction $f=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x\in]-1,1[$,
   $$f'(x)=\frac{\sin x+x\cos x-x^2}{1-2x\cos x+x^2}.$$
   (c) Montrer que $f(t)=\arctan\dfrac{t\,\sin t}{1-t\,\cos t}$ pour $t\in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[-1,1]$, $A_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t^k\,\sin k\,t$.
   (a) Montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[-1,1]$ on ait $|A_n(t)|\leqslant M$.
   (b) Montrer en écrivant $t^k\,\sin(k\,t)=A_k(t)-A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k\,\sin k\,t}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k(t)}{k(k+1)}+\frac{A_n(t)}{n}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   (d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\sin n}{n}$.

Exercice 21 - Zeta alternée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

On considère la fonction $\mu(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.
   (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a
   $$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right).$$
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a
   $$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 22 - Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite - *Oral Mines-Ponts* - ⋆⋆⋆

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout k, $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.

Plus topologique...

Exercice 23 - Convergence uniforme et fonctions bornées - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit (f_n) une suite de fonctions *bornées*, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice 24 - Limite uniforme de polynômes - *Math Spé* - ⋆⋆

Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 25 - Convergence uniforme et composition - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soient I et J deux intervalles et (g_n) une suite de fonctions de I dans J qui converge uniformément sur I vers une fonction g. Soit $f \in C^0(J, \mathbb{R})$ et (h_n) la suite définie par $h_n = f \circ g_n$.

1. Montrer que si J est un segment, alors la suite (h_n) converge uniformément.
2. Que se passe-t-il si on ne suppose plus que J est un segment ?

Exercice 26 - Un théorème de Dini - *L3/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit (f_n) une *suite croissante* (ie $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue. En utilisant les parties K_n définies par

$$K_n = \{x \in [a, b];\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 27 **- Lipschitzienne ou convexe** - *L3/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ avec $\alpha<\beta$, $M\geq 0$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions M-lipschitziennes de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[\alpha,\beta]$, la convergence est en fait uniforme.
2. Soient $]a,b[$ un intervalle ouvert, et (f_n) une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $]a,b[$.

Théorème de Weierstrass et applications

Exercice 28 **- Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n\geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :

$$B_n(x)=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On rappelle que la fonction f, continue sur $[0,1]$, est uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta_\varepsilon>0$ tel que, pour couple $(x,y)\in[0,1]^2$ vérifiant $|x-y|\leq\eta_\varepsilon$, on a : $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. On note par ailleurs $M=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$.

1. Pour $x,y\in\mathbb{R}$, donner une expression simple des quantités suivantes :
$$\sum_{0\leq k\leq n}k\binom{n}{k}x^ky^{n-k}\ \text{et}\ \sum_{0\leq k\leq n}k(k-1)\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$
2. Pour $x\in[0,1]$, on pose $r_k(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Montrer que
$$\sum_{0\leq k\leq n}r_k(x)=1,\ \ \sum_{0\leq k\leq n}kr_k(x)=nx,\ \ \sum_{0\leq k\leq n}k(k-1)r_k(x)=n(n-1)x^2.$$
En déduire l'égalité :
$$\sum_{0\leq k\leq n}(k-nx)^2r_k(x)=nx(1-x).$$
3. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a :
$$|f(x)-B_n(x)|\leq\sum_{0\leq k\leq n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|r_k(x).$$
4. Pour $x\in[0,1]$, on note $J(x)=\{0\leq k\leq n;\ |k-nx|\leq n\eta_\varepsilon\}$. Prouver que :
$$\sum_{k\in J(x)}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|r_k(x)\leq\varepsilon.$$

5. Prouver que :

$$\sum_{k\in J(x)^c}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|r_k(x)\leq 2M\sum_{k\in J(x)^c}\frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2}r_k(x),$$

   puis que

$$\sum_{k\in J(x)^c}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|r_k(x)\leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}.$$

6. En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
7. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si f est continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.