

Exercice 1 - Comprendre le cours - L2/Math Spé - ★

1. On peut bien sûr se lancer dans des calculs très complexes... On peut ! Mais quand même, la décomposition en série de Fourier consiste à représenter une fonction périodique comme somme des fonctions périodiques les plus élémentaires possibles (à savoir les sinus et les cosinus). Alors, bien entendu, la décomposition en série de Fourier de $\cos(5x)$ est $\dots \cos(5x)$! A vous de voir si vous jugez utile de justifier cela ! Cela dit, c'est une bonne occasion de rappeler que

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = 0 \text{ si } p \neq q$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) dx = 0 \text{ pour tous } p, q.$$

2. Posons $h = f - g$. Alors $c_n(h) = c_n(f) - c_n(g) = 0$. De plus, h est continue et vérifie donc les conclusions du théorème de Parseval, à savoir

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(h)|^2 = 0.$$

Puisque $t \mapsto |h(t)|^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $h = 0$ sur $[-\pi, \pi]$. Par 2π -périodicité, $f = g$ sur \mathbb{R} tout entier.

3. D'après le théorème de Parseval, on sait que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est donc convergente. Son terme général tend vers 0, et on conclut que $(c_n(f))$ converge bien vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.

4. Tout repose sur des intégrations par parties. En effet, si f est C^1 et 2π -périodique, on a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= (in) c_n(f). \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient que $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$. Pour $n \neq 0$, on a donc :

$$c_n(f) = \frac{1}{i^k n^k} c_n(f^{(k)}).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $c_n(f^{(k)})$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$ d'après la question précédente. Cette idée d'intégration par parties est très utile lorsqu'on veut relier régularité d'une fonction et comportement de ses coefficients de Fourier.

5. La fonction f est de classe C^1 par morceaux. En effet, sur l'intervalle $[0, \pi[$, elle est la restriction à $[0, \pi[$ d'une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à 1), et sur $]-\pi, 0]$, elle est la restriction de d'une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à -1). Le théorème de convergence simple peut donc s'appliquer. En particulier, en 0, la série de Fourier de f converge vers

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = 0.$$

La série de Fourier de f ne peut pas converger normalement vers f . En effet, si on avait convergence normale, chaque somme partielle étant continue, la limite serait elle aussi continue. Et f n'est pas continue en 0.

6. f n'est pas C^1 par morceaux : en effet, sinon, on pourrait définir sur $[0, \pi]$ une fonction de classe C^1 qui coïncide avec f sur $]0, \pi]$. Ce n'est pas possible car $f'(x)$ tend vers $+\infty$ en 0.

EXERCICES DE CALCUL

Exercice 2 - Quelques décompositions en séries de Fourier - *L2/Math Spé* - ★

1. Cette fonction est impaire, les coefficients en cosinus sont nuls. On a par définition :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

On calcule ce coefficient grâce à une intégration par parties :

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

2. Cette fonction est elle-aussi impaire, et il suffit là encore de calculer les coefficients en sinus :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Ceci s'écrit plus simplement :

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

3. Remarquons que la fonction est paire : il suffit de calculer les coefficients en cosinus. On a :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x| dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} x dx = \frac{L}{4}.$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x| \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) dx = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} x \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) dx.$$

On calcule ceci par intégration par parties pour trouver :

$$a_n = \frac{L}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2L}{n^2 \pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 3 - Application aux calculs de séries - *L2/Math Spé* - ★

La fonction f est paire, ses coefficients en sinus sont nuls, et on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

La calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Maintenant, f est continue et C^1 par morceaux : cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Si l'on fait $x = \pi$, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

On obtient exactement :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on obtient cette fois :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pour calculer la dernière somme demandée, il faut pouvoir mettre les coefficients au carré, et c'est ce que l'on obtient dans l'égalité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{16}{n^4}.$$

Ceci donne :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4 - Une variante - *L2/Math Spé* - ★

1. On a d'abord :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}.$$

D'autre part, en réalisant deux intégrations par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi n} \left[x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx \\
 &= \frac{4}{n^2}.
 \end{aligned}$$

De même, on trouve $b_n = \frac{-4\pi}{n}$. La série de Fourier de f est donc :

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right).$$

2. f est C^1 par morceaux. Pour tout x de \mathbb{R} , on a donc :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right).$$

Pour $x = 0$, on trouve :

$$\frac{1}{2}((2\pi)^2 + 0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2}.$$

Ceci donne donc :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'autre somme se calcule en appliquant le théorème de Parseval. On a donc :

$$\int_0^{2\pi} x^4 dx = \left(\frac{4\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{16}{n^4} + \frac{16\pi^2}{n^2} \right).$$

En utilisant le fait que $\int_0^{2\pi} x^4 dx = \frac{16\pi^4}{5}$, et en réinjectant le calcul précédent, on trouve que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 5 - Termes impairs - L2/Math Spé - *

Evidemment, la fonction est paire, donc les coefficients de Fourier en sinus sont nuls. Calculons les autres coefficients :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1).$$

Or, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, et donc on a $a_{2n} = 0$, et $a_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$. La série de Fourier de f est donc :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Elle est continue et C^1 par morceaux. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet, et f est somme de sa série de Fourier pour tout x de \mathbb{R} . En particulier, pour $x = 0$, il vient :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Enfin, écrivons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{\pi^2} \times \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

En isolant la somme, on trouve donc :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 6 - Exponentielle - $L^2/\text{Math Spé}$ - ★

On calcule les coefficients de Fourier de f . On trouve

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{\sinh \pi}{\pi}.$$

Pour $n \geq 1$, il vient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \Re(e^{inx}) dx \\ &= \Re \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x} dx \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1+in} e^{(1+in)\pi} - e^{(1+in)-\pi} \right] \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left(\frac{(-1)^n e^{\pi} - (-1)^n e^{-\pi}}{1+in} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \Re \left(\frac{2 \sinh \pi}{1+in} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \Re \left(\frac{2(1-in) \sinh \pi}{n^2+1} \right) \\ &= \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(n^2+1)}. \end{aligned}$$

Pour les coefficients en sinus, une démarche similaire donne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(-1)^n}{\pi} \Im \left(\frac{2 \sinh \pi}{1+in} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \Im \left(\frac{2(1-in) \sinh \pi}{n^2+1} \right) \\ &= \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2+1)}. \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \cos(nx) + \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \sin(nx).$$

Remarquons aussi que la fonction f est de classe C^1 par morceaux (mais elle n'est pas continue en les points $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en chaque réel x vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier, pour $x = 0$, on trouve

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \cos(n0) + \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \sin(n0) = f(0)$$

soit

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} = 1.$$

On trouve donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} \times \left(1 - \frac{\sinh \pi}{\pi}\right) = \frac{\pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

Pour calculer la première somme, on choisit $x = \pi$, et on remarque que

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi.$$

On trouve donc

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \cos(n\pi) + \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \sin(n\pi) = \cosh \pi$$

soit

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} \times \left(\cosh \pi - \frac{\sinh \pi}{\pi}\right) = \frac{\pi \cosh \pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

Exercice 7 - Une égalité étonnante ! - L2/Math Spé - ★★

- On commence par remarquer que la fonction est C^1 par morceaux (elle n'est pas continue en les points de $2\pi\mathbb{Z}$) et est impaire, et donc les coefficients de Fourier en cosinus sont nuls. Pour calculer ceux en sinus, il suffit d'une simple intégration par parties, et on trouve que la série de Fourier de f est

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Pour trouver la série de Fourier de g , on peut chercher la valeur de g sur un intervalle de longueur 2π puis intégrer... On peut aussi ruser de la façon suivante : on commence par

remarquer que g est paire (vérification facile). De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} f(x+1) \cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} f(x-1) \cos(nx) dx \\
 &= \int_{-1}^{2\pi-1} f(x+1) \cos(nx) dx - \int_1^{2\pi+1} f(x-1) \cos(nx) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \cos(nu-n) du - \int_0^{2\pi} f(u) \cos(nu+n) du \\
 &= \int_0^{2\pi} 2f(u) \sin(n) \sin(nu) du \\
 &= 2 \frac{\sin n}{n}.
 \end{aligned}$$

La série de Fourier de g est donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2 \sin n}{n} \cos(nx).$$

2. Puisque f est C^1 par morceaux et qu'elle est continue en 1, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

D'autre part, g est continue par morceaux, 2π -périodique, on peut donc lui appliquer le théorème de Parseval, et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{4 \sin^2 n}{n^2}.$$

Reste à calculer l'intégrale, et pour cela à calculer g sur $[0, 2\pi]$:

- si $x \in [1, 2\pi - 1]$, alors

$$g(x) = \frac{\pi - x - 1}{2} - \frac{\pi - x + 1}{2} = -1.$$

- si $x \in [0, 1]$, alors $f(x-1) = f(x-1+2\pi) = \frac{\pi-x+1-2\pi}{2}$ et on obtient donc

$$g(x) = -1 + \pi.$$

- si $x \in [2\pi - 1, 2\pi]$ alors $f(x+1) = f(x+1-2\pi) = \frac{\pi-x-1+2\pi}{2}$ et on obtient

$$g(x) = -1 + \pi.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx = 2(-1 + \pi)^2 + (2\pi - 2)(-1)^2 = 2\pi(\pi - 1).$$

Revenant à l'identité de Parseval, on trouve

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2},$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

Exercice 8 - Avec des séries entières - *L2/Math Spé* - **

1. On écrit

$$\frac{1}{x + e^a} = \frac{e^{-a}}{1 + e^{-a}x} = e^{-a} \sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{-na} x^n$$

développement valable pour $|x| < e^a$.

2. C'est une simple vérification.
 3. Puisque $a > 0$, on a $|e^{ix}| < e^a$, et donc

$$\frac{e^a}{e^{ix} + e^a} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{inx} e^{-na}.$$

Pour la seconde partie, il faut faire attention au fait que $e^{-a} < 1$, et donc que le résultat de la première question ne peut pas s'appliquer directement. Mais on écrit

$$\frac{e^{-a}}{e^{ix} + e^{-a}} = \frac{e^{-a}e^{-ix}}{1 + e^{-a}e^{-ix}} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-nix} e^{-na}.$$

Il vient

$$g(x) = \frac{1}{\sinh a} \left(1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-na} (e^{inx} - e^{-inx}) \right) = \frac{1}{\sinh a} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a} \cos(nx).$$

g s'écrit donc comme somme d'une série trigonométrique qui converge uniformément (car normalement, la série $\sum_{n \geq 1} e^{-na}$ est convergente) sur \mathbb{R} . La série de Fourier de g est donc bien

$$\frac{1}{\sinh a} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a} \cos(nx).$$

Exercice 9 - Décomposition de sinus en produit infini - *L2/Math Spé* - ***

1. La fonction est paire, on a donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) dt = \frac{2 \sin(\alpha\pi)}{2\alpha\pi}.$$

De même, pour $n \geq 1$, on réalise une double intégration par parties pour calculer $a_n(f)$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\cos(\alpha t) \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\alpha}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{\alpha}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{\alpha}{\pi n^2} [-\sin(\alpha t) \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\alpha^2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2(-1)^{n+1} \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2} a_n(f). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$a_n(f) \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) = \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin(\alpha\pi)}{\pi n^2}$$

soit

$$a_n(f) = \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \times \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Ceci démontre bien que la série de Fourier de f est

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos(nt)\right).$$

2. On remarque que, par parité de \cos , la fonction f est continue (les seuls points qui pourraient poser problème sont ceux de $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, mais on a bien par construction

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \cos(\alpha\pi) = \cos(-\alpha\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$$

et donc f est aussi continue en ces points). De plus, f est C^1 par morceaux. Ainsi, f est en tout point somme de sa série de Fourier. En particulier, en π , on a

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} (-1)^n\right).$$

Ceci entraîne immédiatement que

$$\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

3. On a

$$\ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-t^2}{n^2}.$$

Puisque, à t fixé, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{-t^2}{n^2}$ est une série numérique convergente dont le terme général est toujours négatif, on en déduit par critère d'équivalence que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$ converge pour chaque $t \in]-1, 1[$. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$ converge simplement vers une fonction g sur $] -1, 1[$. Pour prouver que g est C^1 , on va utiliser un argument de convergence uniforme de la série des dérivées. Soit $a \in]0, 1[$, et posons, pour $n \geq 1$ et $t \in [-a, a]$,

$$u_n(t) = \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right).$$

Chaque fonction u_n est dérivable sur $[-a, a]$, avec

$$u'_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2}.$$

De plus, pour $t \in [-a, a]$, on a

$$n^2 - t^2 \geq n^2 - a^2 \text{ et } |2t| \leq a.$$

On en déduit que

$$|u'_n(t)| \leq \frac{2a}{n^2 - a^2}.$$

Le membre de droite (qui ne dépend pas de t !) est le terme général d'une série numérique convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n(t)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a, a]$. On en déduit que g est de classe C^1 sur tout segment $[-a, a] \subset]-1, 1[$, donc sur $] - 1, 1[$, avec

$$g'(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2t}{t^2 - n^2}.$$

4. D'après les résultats des questions précédentes, on a, pour tout $t \in] - 1, 1[$, $t \neq 0$,

$$g'(t) = \pi \cotan(\pi t) - \frac{1}{t}.$$

On intègre cette relation et on obtient qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$g(t) = \ln \left(\frac{\sin(\pi t)}{t} \right) + C.$$

On fait tendre t vers 0. Le membre de gauche tend vers 0, celui de droite vers $\ln(\pi) + C$. On en déduit que $C = -\ln \pi$ et donc que, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$g(t) = \ln \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right).$$

Un raisonnement similaire donne le même résultat sur $[-1, 0]$. Passant à l'exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} &= \exp(g(t)) \\ &= \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(\left(1 - \frac{t^2}{k^2} \right) \right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \right), \end{aligned}$$

le symbole $\prod_{k=1}^{+\infty}$ devant être compris comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n$.

SÉRIES DE FOURIER - EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 10 - Des sommes partielles à f - *L3/Math Spé* - ★

Puisque f est seulement supposée continue, le seul théorème "ponctuel" que l'on a à notre disposition est celui de Féjer. Pour tout x , on a

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{S_0(f)(x) + \dots + S_N(f)(x)}{N + 1}.$$

Maintenant, il est clair que

$$\left\| \frac{S_0(f)(x) + \dots + S_N(f)(x)}{N + 1} \right\|_{\infty} \leq 1,$$

ce qui prouve le résultat

Exercice 11 - Régularité et décroissance des coefficients - sans indications - L2/L3/Math Spé/Oral Mines - ★★★

Supposons d'abord que f est de classe C^∞ . Alors, par intégrations par parties successives, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}).$$

D'autre part, les coefficients de Fourier d'une fonction continue tendent vers 0 en $+\infty$. C'est par exemple une conséquence du théorème de Parseval. Ainsi, on a

$$n^k c_n(f) = \frac{c_n(f^{(k)})}{i^k} \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0.$$

Réciproquement, supposons que $n^k c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. On considère la série trigonométrique

$$S(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}.$$

Cette série converge normalement sur \mathbb{R} , car il existe une constante $M > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc on a

$$|c_n(f) e^{int}| \leq \frac{M}{|n|^2+1},$$

et le membre de droite de l'inégalité précédente est le terme général d'une série numérique convergente. Ainsi, S est définie sur \mathbb{R} tout entier, et est continue. De plus, on a

$$|(in)^k c_n(f)| \leq \frac{C_k}{|n|^2+1}$$

pour une certaine constante C_k puisque $n^{k+2} c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. Ceci montre que toutes les séries dérivées de S convergent normalement sur \mathbb{R} , et donc que S définit une fonction C^∞ sur \mathbb{R} .

Reste à prouver que S et f coïncident. Mais, S est somme d'une série trigonométrique qui converge normalement, donc uniformément, et donc ses coefficients de Fourier sont les coefficients de la série trigonométrique. Autrement dit, on a $c_n(f) = c_n(S)$. Maintenant, comme conséquence du théorème de Parseval, on sait que deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales. Donc $f = S$ et f est C^∞ .

Exercice 12 - Régularité et décroissance des coefficients - avec indications - L2/L3/Math Spé/Oral Mines - ★

1. C'est une conséquence du théorème de Parseval : la série $\sum |c_n(f)|^2$ converge, son terme général tend donc vers 0.
2. Par intégrations par parties successives, on trouve

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}).$$

3. En mettant ensemble les deux questions précédentes, on trouve :

$$n^k c_n(f) = \frac{c_n(f^{(k)})}{i^k} \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0.$$

4. (a) Voir la question suivante

(b) La série définissant S converge normalement sur \mathbb{R} , car il existe une constante $M > 0$ telle que $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc on a

$$|c_n(f)e^{int}| \leq \frac{M}{|n|^2+1},$$

et le membre de droite de l'inégalité précédente est le terme général d'une série numérique convergente. Ainsi, S est définie sur \mathbb{R} tout entier, et est continue. De plus, on a

$$|(in)^k c_n(f)| \leq \frac{C_k}{|n|^2+1}$$

pour une certaine constante C_k puisque $n^{k+2}c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. Ceci montre que toutes les séries dérivées de S convergent normalement sur \mathbb{R} , et donc que S définit une fonction C^∞ sur \mathbb{R} . S est somme d'une série trigonométrique qui converge normalement, donc uniformément, et donc ses coefficients de Fourier sont les coefficients de la série trigonométrique.

(c) Soient u et v deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier. Alors la fonction $u - v$ a ses coefficients de Fourier nuls. Par le théorème de Parseval, on en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |u(t) - v(t)|^2 dt = 0.$$

L'intégrale sur $[0, 2\pi]$ de la fonction continue et positive $|u - v|^2$ est nulle. C'est que cette fonction est identiquement nulle, et donc que $u = v$.

(d) Il suffit de mettre ensemble les résultats précédents.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et 2π -périodique. f est de classe C^∞ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 13 - Phénomène de Gibbs - L2/Math Spé - **

1. (a) La fonction \sin est concave dans $[0, \pi/2]$. Son graphe est au-dessus de ses cordes, en particulier au dessus de la corde qui relie le point $(0, 0)$ au point $(\pi/2, 1)$. Ceci donne exactement l'inégalité demandée.
- (b) Il s'agit juste de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à la fonction $t \mapsto \sin t$, entre les points 0 et x .
- (c) Puisque $\sin(t/2n) \sim_{+\infty} t/2n$, on en déduit que pour $t \in]0, \pi]$, $(h_n(t))$ converge vers $\frac{\sin t}{t}$. Soit h défini par $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \in]0, \pi]$ et $h(0) = 1$. On va démontrer que (h_n) converge uniformément vers h sur $]0, \pi]$. On a, pour $t \in]0, \pi]$,

$$|h_n(t) - h(t)| = \frac{(2n)|\sin t| \times |\sin(t/2n) - (t/2n)|}{|(2n)t \sin(t/2n)|}.$$

Mais, $|\sin t| \leq 1$ et $|\sin(t/2n) - (t/2n)| \leq \frac{t^3}{8n^3}$. De plus, puisque $t \in]0, \pi]$, $t/2n \in]0, \pi/2]$ et on a

$$\sin(t/2n) \geq \frac{2}{\pi} \times \frac{t}{2n} = \frac{t}{\pi n}$$

ce qui donne finalement

$$|h_n(t) - h(t)| \leq 2n \times \frac{t^3}{8n^3} \times \frac{\pi n}{t^2} = \frac{\pi t}{4n^2} \leq \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de (h_n) vers h sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2. La fonction f est impaire, donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \\ &= +\frac{1}{\pi n} (\cos(0) - \cos(-n\pi)) + \frac{1}{n} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\ &= -\frac{1}{\pi n} (2 - 2(-1)^n). \end{aligned}$$

Ainsi, si n est pair, $b_n(f) = 0$ et si n est impair, $b_n(f) = \frac{4}{\pi n}$. Puisque f est C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en x . En les points où f est continue, cette demi-somme est bien sûr égale à $f(x)$. En $k\pi$, cette demi-somme fait 0, et donc vaut aussi $f(k\pi)$. Bien sûr, la convergence ne saurait être uniforme, puisque f n'est pas continue alors que chaque somme partielle de la série de Fourier l'est.

3. S_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x).$$

Reste à calculer cette somme. Si $x = k\pi$, on trouve bien que $S'_n(x) = \frac{(-1)^q 4n}{\pi}$. Pour $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on écrit que

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \Re e \left(\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} \right).$$

On utilise ensuite la somme d'une série géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} &= e^{-ix} \sum_{k=1}^n e^{2ikx} \\ &= e^{-ix} \frac{e^{2ix} - e^{i(2n+2)x}}{1 - e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{-ix} e^{i(n+2)x} e^{-inx} - e^{inx}}{e^{ix} e^{-ix} - e^{ix}} \\ &= e^{inx} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on trouve finalement

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\cos(nx) \sin(nx)}{\sin x} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

Ainsi, en chaque point de la forme $\frac{k\pi}{2n}$, $k \in \{1, \dots, 2n - 1\}$, la fonction S'_n s'annule et change de signe. Ainsi, S_n présente un extremum en ces points. De plus, S'_n ne s'annule sur l'intervalle $]0, \pi[$ qu'en ces points. On a donc trouvé les $2n - 1$ extrema locaux de f sur $]0, \pi[$. Le premier d'entre eux est bien atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$, et $S'_n \geq 0$ avant x_n tandis que $S'_n \leq 0$ après x_n . x_n est bien un maximum local de S_n .

4. Puisque S'_n est continue, le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S'_n(t) dt.$$

D'après les calculs effectués précédemment, on trouve

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt.$$

En particulier,

$$a_n = S_n(x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt.$$

Le changement de variables $u = nt$ donne le résultat souhaité.

5. On a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_n(t) dt.$$

Or, la fonction (h_n) converge uniformément vers h sur $[0, \pi]$. On peut donc permuter la limite et l'intégrale et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 14 - Séries trigonométriques qui convergent uniformément - L2/L3/Math Spé - **

1. Ceci découle directement du critère de Cauchy uniforme. On peut aussi reprouver ceci simplement (c'est le sens facile du critère de Cauchy uniforme que l'on utilise). Puisque la série converge uniformément sur I , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Puisque $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, on en déduit que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$, on a

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve à la fois que u_n est bornée sur I pour n assez grand, et aussi que $(\|u_n\|_\infty)$ tend vers 0.

2. C'est classique (et semblable au passage de l'écriture d'un nombre complexe de la forme cartésienne à la forme trigonométrique). On met $\sqrt{a^2 + b^2}$ en facteur, et on a

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right).$$

Posons $u = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $v = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors u et v sont deux réels tels que $u^2 + v^2 = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \cos(\theta)$ et $v = \sin(\theta)$. On obtient donc

$$|a \cos(x) + b \sin(x)| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x)| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(x - \theta)|.$$

Or, la fonction $x \mapsto |\cos(x - \theta)|$ atteint son maximum, qui vaut 1, en tous les points de $\theta + \pi\mathbb{Z}$. Puisque I est de longueur au moins π , un de ces points est dans I . Ceci prouve que le maximum de $|a \cos x + b \sin x|$ sur I est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. On utilise les deux questions précédentes :

- On sait que $\sup_{x \in I} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$ tend vers 0.
- De plus, soit $I_n = nI = [n\alpha, n\beta]$. Alors

$$\sup_{x \in I} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| = \sup_{y \in I_n} |a_n \cos(y) + b_n \sin(y)|.$$

Or, pour n assez grand, I_n est de longueur au moins π et donc

$$\sup_{x \in I} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Combinant les deux propriétés, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 + b_n^2 = 0$$

Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2 = 0$ - on peut justifier cela par le théorème des gendarmes,

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2.$$

Prenant la racine carrée, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Exercice 15 - Théorème de Féjer - L2/L3/Math Spé - ★★★

1. Remarquons que le changement de variables $y = x - t$ et la 2π -périodicité des fonctions assure que $f \star e_k = e_k \star f$. Ainsi, on en déduit

$$f \star e_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} f(t) dt = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right) e_k(x).$$

Par linéarité, $f \star S_n$ est un polynôme trigonométrique, et on reconnaît même que c'est la n -ième somme partielle de la série de Fourier de f .

2. C'est un calcul excessivement classique! En remarquant que S_n est une somme géométrique, on en déduit, pour $x \notin \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$S_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

On recommence, en utilisant l'astuce classique d'écrire $\sin((n+1)x/2) = \Im(e^{i(n+1)x/2})$.

On trouve :

$$\sum_{k=0}^n e^{(k+1/2)ix} = e^{i(n+1)x/2} \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Retournant à C_n en prenant la partie imaginaire, on trouve le résultat demandé.

3. La positivité de C_n résulte immédiatement de l'expression précédente qui fait intervenir un carré. Pour l'intégrale, il suffit d'abord de remarquer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) dt = 1$$

(calcul immédiat), ce qui donne le même résultat pour C_n par linéarité. Ensuite, si $x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$, on a $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\alpha/2)|$, ce qui entraîne

$$|C_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2(\alpha/2)},$$

quantité qui tend vers 0 indépendamment de x .

4. Remarquons d'abord que si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \star C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) C_n(u) du.$$

Prouvons la convergence uniforme. On fixe $\varepsilon > 0$. On a :

$$|f \star C_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) C_n(u) du \right|.$$

On fixe un $\alpha \in]0, 2\pi[$ (une valeur précise sera explicitée plus tard), et on découpe l'intégrale. On obtient :

$$|f \star C_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\alpha| \leq t \leq \pi} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \alpha} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du.$$

On gère les deux parties de l'intégrale très différemment. D'une part, f est une fonction continue et périodique. Elle est donc bornée par une constante M sur \mathbb{R} (la borne M étant celle qui apparaît sur l'intervalle $[0, 2\pi]$). On a donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\alpha| \leq t \leq \pi} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du \leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} C_n(u) du.$$

Maintenant, puisque la fonction C_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$, l'intégrale qui apparaît dans cette dernière expression tend vers 0. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\alpha| \leq t \leq \pi} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du \leq \varepsilon.$$

Pour l'autre expression, on remarque que si α est petit, $x-u$ et x seront proches, et on peut espérer que $|f(x-u) - f(x)|$ sera petit. Il nous faut ici un argument d'uniforme continuité. C'est possible, car toute fonction continue et périodique est en fait uniformément continue (c'est un très bon exercice utilisant le théorème de Heine et des découpages avec des ε). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc $\alpha > 0$ (c'est maintenant qu'on le fixe) tel que

$$|z - y| \leq \alpha \implies |f(z) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\alpha| \leq t \leq \pi} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_n(u) du \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour $n \geq N$, on a bien

$$|f \star C_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence uniforme (sur \mathbb{R}).

APPLICATIONS DES SÉRIES DE FOURIER

Exercice 16 - Inégalité de Wirtinger - *L2/Math Spé* - ★★

Le fait de regarder des inégalités concernant des intégrales de fonction prises au carré incite à utiliser l'identité de Parseval. On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de f . L'énoncé donne $c_n(f) = 0$. Par ailleurs, une simple intégration par parties montre que $c_n(f') = inc_n(f)$. L'identité de Parseval appliquée aux deux fonctions f et f' donne donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

ce qui donne l'inégalité voulue. Pour qu'il y ait égalité, il faut que partout les inégalités soient des égalités. En particulier, on doit avoir $n^2 |c_n(f)|^2 = |c_n(f)|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Ceci entraîne en particulier que $c_n(f) = 0$ pour $|n| > 1$. Comme f est de classe C^1 , sa série de Fourier converge normalement vers f , et on obtient donc que $f(t) = ae^{-it} + be^{it}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Réciproquement, il est facile de vérifier que pour des fonctions de cette forme, il y a égalité.

Exercice 17 - Lien entre f et sa dérivée seconde - *L2/Math Spé* - ★★

Par une double intégration par parties, on trouve que $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$. En particulier, on a $|c_n(f'')| \geq |c_n(f)| \geq 0$ pour $n \neq 0$. De plus, on sait par hypothèse que $c_0(f) = 0$. D'après le théorème de Parseval, on a

$$\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 dt = \sum_{n \neq 0} |c_n(f'')|^2$$

et

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \neq 0} |c_n(f)|^2.$$

Puisque $|f''| \leq |f|$, on en déduit que

$$\sum_{n \neq 0} |c_n(f'')|^2 = \sum_{n \neq 0} n^2 |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \neq 0} |c_n(f)|^2.$$

Ceci entraîne nécessairement que $c_n(f) = 0$ pour $|n| > 1$. Ainsi, puisque $c_0(f) = 0$, on doit avoir

$$f(t) = ae^{it} + be^{-it}$$

pour a, b des constantes complexes. Réciproquement, si $f(t) = ae^{it} + be^{-it}$, on vérifie facilement que $f'' = -f$ et donc $|f''| = |f|$.

Exercice 18 - Fonctions 2π -périodiques et croissances des dérivées - *L2/Math Spé* - **

Procédons par analyse-synthèse. Soit f une solution du problème. Puisque f est de classe C^∞ , f , ainsi que toutes ses dérivées, sont sommes de leur série de Fourier qui converge normalement sur \mathbb{R} . On écrit donc $f(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p e^{ipx}$. On sait que $c_p(f^{(n)}) = (ip)^n c_p(f)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} |c_p(f^{(n)})| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(n)}(t) e^{ipt} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \lambda^n dx \\ &\leq M \lambda^n. \end{aligned}$$

On en déduit

$$c_p(f) \leq M \frac{\lambda^n}{|p|^n}.$$

Ainsi, dès que $|p| \geq \lambda$, faisant tendre n vers l'infini, on trouve que $c_p(f) = 0$. Ainsi, f est nécessairement un polynôme trigonométrique. Réciproquement, si f est un polynôme trigonométrique, il s'écrit $f(x) = \sum_{p=-p_0}^{p_0} c_p e^{ipx}$. On a alors, pour tout n , $f^{(n)}(x) = \sum_{p=-p_0}^{p_0} (ip)^n c_p e^{ipx}$, d'où l'on déduit

$$|f^{(n)}(x)| \leq p_0^n \sum_{p=-p_0}^{p_0} |c_p|,$$

ce qui montre que f est solution du problème avec $\lambda = p_0$ et $M = \sum_{p=-p_0}^{p_0} |c_p|$.

Exercice 19 - Inégalité de Bernstein - *L2/Math Spé* - ***

1. On trouve que $c_{2k}(S) = 0$, et $c_{2k+1}(S) = 2\pi e^{-(2k+1)i\pi}$. En particulier, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi/2}.$$

D'autre part, puisque S est continue et de classe C^1 par morceaux, et que S est continue en $\pi/2$, on a

$$\frac{\pi}{2} = S(\pi/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi/2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|.$$

2. On a

$$h'(t) = \sum_{j=1}^n i\lambda_j a_j e^{i\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n iS(\lambda_j) a_j e^{i\lambda_j t}.$$

Puisque la série de Fourier de S converge normalement vers S sur \mathbb{R} , on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{j=1}^n ia_j e^{i\lambda_j t} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(S) e^{ik\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} ic_k(S) \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j(t+k)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ic_k(S) h(t+k) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |h'(t)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(S)| \|h\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \|h\|_{\infty}. \end{aligned}$$

3. Il suffit de poser $h(t) = P(\alpha t)$, avec $\alpha = \frac{\pi}{2\lambda}$, puis d'appliquer le résultat précédent à h , et de remonter à P !

Exercice 20 - Séries de Fourier et équations différentielles - L2/L3/Math Spé - ★★

1. (a) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{(n!)^2} e^{int} \right| \leq \frac{1}{(n!)^2}$$

et le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. La série trigonométrique converge normalement, donc uniformément sur \mathbb{R} .

- (b) Puisque, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(n!)^2} e^{int}$ est continue, et puisque la série trigonométrique converge uniformément, la fonction f est continue. De plus, f_n est de classe C^2 et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f'_n(t)| \leq \frac{n}{(n!)^2} \text{ et } |f''_n(t)| \leq \frac{1}{((n-1)!)^2}.$$

Les membres de droite sont à chaque fois des séries numériques convergentes (par exemple, d'après la règle de d'Alembert), les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ et $\sum_{n \geq 0} f''_n(t)$ convergent donc normalement sur \mathbb{R} . Ceci prouve que f est de classe C^2 , et de plus que $f'''(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(in)^2}{n!} e^{int}$. On en déduit

$$\begin{aligned} f'''(t) + e^{it} f(t) &= \sum_{n \geq 1} \frac{-1}{((n-1)!)^2} e^{int} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{i(n+1)t} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{(n!)^2} e^{i(n+1)t} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{i(n+1)t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle (E).

2. (a) Il suffit de faire une double intégration par parties pour prouver que

$$c_n(g'') = (in)^2 c_n(g) = -n^2 c_n(g).$$

- (b) Puisque g est solution de l'équation différentielle (E), on sait que $g''(t) = -g(t)e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci donne

$$\begin{aligned} c_n(g'') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{it} e^{-int} dt \\ &= -c_{n-1}(g). \end{aligned}$$

- (c) Les deux résultats précédents pris ensemble prouvent que, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_{n-1}(g) = n^2 c_n(g).$$

Par deux récurrences faciles, on prouve alors que, pour tout $n \geq 0$, $c_n(g) = \frac{c_0(g)}{(n!)^2}$, et pour tout $n < 0$, $c_n(g) = 0$. De plus, puisque g est C^1 et 2π -périodique, elle est somme de sa série de Fourier. Autrement dit, on a

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{int} = c_0 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{int}.$$

Ainsi, g est proportionnelle à la fonction f et l'ensemble des solutions 2π -périodiques de (E) est l'espace vectoriel engendré par f .

3. On rappelle que d'après le théorème de Cauchy, l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2. Il existe donc des solutions qui ne sont pas 2π -périodiques.

Exercice 21 - Equation de la chaleur - L3 - ***

1. On introduit la fonction u dans l'équation aux dérivées partielles. En supposant que les fonctions f et g ne s'annulent pas, on obtient que :

$$\forall (x, t) \in Q, \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de x et celui de gauche ne dépend pas de x , on en déduit l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad g'(t) - \lambda g(t) = 0.$$

2. Il y a plusieurs possibilités pour résoudre l'équation différentielle vérifiée par f , suivant les valeurs de λ . D'abord, si $\lambda > 0$, f s'écrit $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Puisque u vérifie la dernière condition imposée, on a forcément : $f(0) = f(L) = 0$. Ceci donne le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases}$$

Ce système étant inversible, ceci donne $A = B = 0$, et la fonction u est identiquement nulle : ce n'est guère intéressant ! Si maintenant $\lambda = 0$, f s'écrit $f(x) = Ax + B$. On obtient encore avec $f(0) = f(L) = 0$ que $A = B = 0$: ce n'est pas plus intéressant ! La dernière possibilité est donc $\lambda < 0$: en posant ω tel que $\lambda = -\omega^2$, f s'écrit $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$. La valeur en 0 donne $A = 0$. Pour avoir $B \neq 0$, il faut donc que $\sin(\omega L) = 0$. Donc, $\omega = \frac{k\pi}{L}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On résoud maintenant l'équation pour g . On trouve $g(t) = Ce^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$. Une solution de l'équation vérifiant aussi la dernière condition s'écrit donc

$$u(x, t) = C \times \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

La somme de deux solutions étant encore une solution (c'est le principe de superposition), une solution de la forme donnée par l'énoncé est plausible.

3. \tilde{h} est une fonction continue, C^1 par morceaux, $2L$ -périodique, et impaire. Elle est donc somme de sa série de Fourier (qui converge normalement) et qui ne comporte que des termes en sinus :

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n \geq 1} b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Si on veut faire coïncider $u(x, 0)$ avec $h(x)$, on est donc conduit à poser $a_k = b_k(h)$.

4. Passons à l'étape de synthèse. Soit donc u donné par :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Remarquons d'abord que cette série est normalement convergente sur \overline{Q} . On a en effet :

$$\forall (x, t) \in Q, \quad \left| b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \right| \leq |b_n(\tilde{h})|,$$

et on sait que la série $\sum |b_n(\tilde{h})|$ est convergente. Ainsi, ceci définit bien une fonction continue sur \overline{Q} , et il est clair que u vérifie les deux dernières conditions. Pour prouver que u vérifie aussi l'équation de la chaleur, il est simplement nécessaire de prouver que l'on peut dériver terme à terme sous le signe somme. Ceci est justifié par la convergence normale de toutes les séries dérivées sur $[0, L] \times [\varepsilon, +\infty[$, où ε est n'importe quel réel strictement positif. Posons en effet $u_n(x, t) = b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$. Si α et β sont des entiers, on a :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} u_n(x, t) = P_{\alpha,\beta}(n) b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},$$

où $P_{\alpha,\beta}$ est un polynôme. En particulier, puisque la suite $b_n(\tilde{h})$ est bornée par une constante M , on a :

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} u_n(x, t) \right| \leq M P_{\alpha,\beta}(n) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon}$$

pour tout $x \in [0, L]$ et tout $t \geq \varepsilon$. Cette dernière série converge, ce qui prouve le résultat voulu.

SPÉCIAL L3/MASTER

Exercice 22 - Formule sommatoire de Poisson - L3/M1 - ★★★

1. On va prouver que la série est normalement convergente sur tout compact de \mathbb{R} . Comme il s'agit de fonctions continues, la somme sera évidemment continue. Fixons donc $A > 0$. Si $|x| \leq A$, et $|n| \geq 2A$, on a $|x + n| \geq |n| - |x| \geq |n|/2$, ce qui donne par hypothèse

$$|F(x + n)| \leq \frac{M}{(1 + n/2)^\alpha}.$$

Il s'agit ici du terme général d'une série qui converge, et f est continue. Le changement d'indices $n' = n + 1$ montre en outre que f est continue.

2. On a :

$$c_m(f) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi mt} dt = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(t + n)e^{-i2\pi mt} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 F(t + n)e^{-i2\pi mt} dt.$$

L'interversion limite intégrale est ici justifiée par la convergence normale de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(t + n)$ sur $[0, 1]$, et le fait que $|e^{-i2\pi mt}| = 1$. On obtient

$$c_m(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} F(u)e^{-i2\pi mu} du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-i2\pi mu} du = \hat{F}(m).$$

3. Il s'agit d'un résultat général qui dit que si la série de Fourier d'une fonction continue est absolument convergente, alors elle est partout somme de sa série de Fourier. Redémontrons ce résultat dans ce cas. Soit $g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f)e^{imt}$. Puisque $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(m)| < +\infty$, g est une fonction continue qui est somme de sa série de Fourier (série trigonométrique qui converge uniformément). Maintenant, g et f sont deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier : elles sont égales !
4. D'après les deux questions précédentes, f est partout somme de sa série de Fourier. C'est en particulier le cas en 0. On obtient donc que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n).$$

Exercice 23 - Théorème de Wiener-Lévy - M1 - ★★★

1. Posons $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$, qui est une fonction continue 2π -périodique (la série converge normalement). D'autre part, le théorème de convergence dominée (par exemple) assure que $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$. Par injectivité de la fonction qui à un élément de $L^1(\mathbb{T})$ associe ses coefficients de Fourier, on en déduit que $f = g$.
2. Ecrivons $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$, et $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n)e^{int}$. Les deux séries étant absolument convergentes pour tout t , il est possible de prendre leur produit de Cauchy, et on a donc :

$$fg = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i+j=n} \hat{f}(i)\hat{g}(j)e^{int}.$$

On a donc

$$\|fg\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i+j=n} \|\hat{f}(i)\hat{g}(j)\|.$$

On reconnaît alors dans le membre de droite de cette dernière inégalité le produit de Cauchy de $\sum_n |\hat{f}(n)|$ avec $\sum_n |\hat{g}(n)|$.

3. Une intégration par parties montre que

$$\hat{f}(n) = \frac{\hat{f}'(n)}{in}, \quad n \neq 0.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le théorème de Parseval-Bessel (à la fonction f'), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| &\leq |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\hat{f}'(n)| \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + C \left(\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

4. Soit $f \in A(\mathbb{T})$, et posons $f_N = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)e^{int}$. Alors on a

$$\|f - f_N\| \leq \sum_{n > |N|} \hat{f}(n),$$

quantité qui tend vers 0 comme reste d'une série divergente.

5. Puisque les V_x recouvrent $[0, 2\pi]$, et que $[0, 2\pi]$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini V_1, \dots, V_N . Considérons ψ_1, \dots, ψ_N une partition de l'unité C^∞ associée à ce recouvrement, ie ψ_i à son support inclus dans V_i , ψ_i est C^∞ , et $\sum_{j=1}^N \psi_j = 1$. On a alors, pour tout x de $[0, 2\pi]$, $f(x) = \sum_{j=1}^N g_j(x)\psi_j(x)$. Prolongeons alors chaque ψ_j par 2π -périodicité en une fonction C^∞ sur \mathbb{R} (il suffit de remarquer qu'il est possible de supposer que chaque voisinage V_j peut être inclus dans un intervalle de longueur inférieure à 2π). Par la question précédente, ψ_j et g_j sont tous deux éléments de $A(\mathbb{T})$. Puisque $A(\mathbb{T})$ est une algèbre, f est élément de $A(\mathbb{T})$.

6. (a) Un calcul simple montre que

$$\hat{\Delta}_k(0) = \frac{1}{2k\pi}, \quad \hat{\Delta}_k(n) = \frac{k}{\pi n^2} (1 - \cos(n/k)).$$

On utilise alors l'une des majorations suivantes

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}, \quad 1 - \cos(x) \leq 2$$

ce qui donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\Delta}_k(n)| \leq \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \left(k \sum_{n=1}^k \frac{1}{2k^2} + 2k \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right).$$

Or,

$$k \sum_{n=1}^k \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2},$$

tandis qu'il est bien connu que (et cela s'obtient par exemple en comparant une série et une intégrale)

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = O(1/k),$$

ce qui donne bien la majoration !

- (b) Supposons d'abord f de classe C^∞ . En utilisant le résultat de la question 3., il suffit d'établir que $\delta_k \hat{v}(0)$ et $\int_0^{2\pi} |(\Delta_k f)'|^2$ tendent vers 0. Mais, $0 \leq V_k \leq 1$, et le support de V_k est inclus dans $[-1/k, 1/k]$, d'où

$$|\hat{V}_k(0)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{k\pi},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V_k(x) f'(x)|^2 dx \leq \frac{\|f'\|_\infty^2}{k\pi}.$$

On a enfin $|V_k'| \leq 2k$, et par hypothèse sur f , $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty k^{-1}$ sur le support de V_k' . Cela donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V_k'(x) f(x)|^2 dx \leq \frac{2\|f'\|_\infty^2}{k\pi}.$$

Traisons enfin le cas où f n'est plus supposé C^∞ . Fixons $\varepsilon > 0$. Par la densité des polynômes trigonométriques dans $A(\mathbb{T})$, il existe une fonction g de classe C^∞ telle que $\|f - g\| \leq \varepsilon$ et $g(0) = 0$. Par le résultat précédent, il existe K tel que $k \geq K \implies \|V_k g\| \leq \varepsilon$. Remarquons enfin que la question précédente entraîne l'existence de $C > 0$ tel que $\|V_k\| \leq C$. On a donc

$$\|V_k f\| \leq \|V_k(f - g)\| + \|V_k g\| \leq (C + 1)\varepsilon$$

dès que $k \geq K$.

7. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$. Pour k assez grand, $\|V_k f\| < R$, ce qui garantit la convergence de la série $\sum \|c_k (V_k f)^n\|$. $A(\mathbb{T})$ étant un espace de Banach, la convergence "absolue" des séries entraîne leur convergence, et donc $\sum_k c_k (V_k f)^n$ converge dans $A(\mathbb{T})$. En outre, pour $|x| < 1/2k$, $V_k f(x) = f(x)$. Autrement dit, $F \circ f$ coïncide au voisinage de 0 avec $\sum_k c_k (V_k f)^n$, qui est élément de $A(\mathbb{T})$.
8. D'après la question 5, il suffit de prouver que pour tout a de $[0, 2\pi]$, $F \circ f$ coïncide au voisinage de a avec une fonction de $A(\mathbb{T})$. Pour cela, on pose

$$f_a(x) = f(x + a) - f(x), \quad G_a(z) = F(f(a) + z) - F(f(a)).$$

f_a et G_a satisfont aux hypothèses de la question précédente : il existe donc une fonction h_a de $A(\mathbb{T})$ telle que h_a coïncide avec $G_a \circ f_a$ sur un voisinage de 0. Il suffit alors de poser $g_a(x) = h_a(x - a) + F(f(a))$. g_a coïncide avec $F \circ f$ au voisinage de a .

Exercice 24 - Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier... - M1

- ★★★

1. En écrivant comme dans l'énoncé et en utilisant le théorème de Fatou, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n.$$

Maintenant, la quantité de droite (à l'intérieur de la limite) est exactement $\sigma_N(f)(0)$, et cette quantité tend vers $f(0)$.

2. Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, c'est clair (le sinus est nul). Sinon, cela résulte d'une transformation d'Abel, et du fait que la série $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ est convergente.
3. Une intégration par parties entraîne que $c_n(F) = \frac{c_n(f)}{i\pi}$, et donc $c_{|n|}(F) = \frac{-a_{|n|}}{2|n|}$ pour $|n| \geq 1$. En vertu de la réponse à la question 1, on en déduit $\sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} < +\infty$.
4. Résulte de la question précédente et du fait que $\sum \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

Exercice 25 - Divergence de la série de Fourier d'une fonction continue - M1 - ★★★

1. On a

$$|T_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} D_n(t) f(-t) dt \right| \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que $\|T_n\| \leq \|D_n\|_1$. Pour l'autre inégalité, l'idéal serait de pouvoir prendre ε continue 2π -périodique telle que $\varepsilon(t) = \text{signe}(D_n(t))$, auquel cas on aurait exactement

$$T_n(\varepsilon) = \|D_n\|_1 = \|D_n\|_1 \|\varepsilon\|_\infty.$$

La continuité est impossible à satisfaire, mais il existe une suite ε_k de fonctions continues, avec $\|\varepsilon_k\|_\infty \leq 1$, qui converge simplement vers ε . Utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient alors

$$\lim_k |T(\varepsilon_k)| = \|D_n\|_1,$$

alors qu'on a toujours $\|T_n(\varepsilon_k)\| \leq \|D_n\|_1$, ce qui donne le résultat.

2. Observons que $D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$. L'idée est de faire intervenir un changement de variables, et de faire intervenir $\sin(t)/t$. Écrivons en effet

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{t/2} + \varphi(t) \sin((n+1/2)t),$$

où $\varphi(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Cette fonction est continue sur $[0, 2\pi]$, on peut appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue pour obtenir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin((n+1/2)t) dt = 0.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t/2} = \int_0^{(n+1/2)2\pi} \frac{|\sin(u)|}{u/2} du.$$

Mais $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ et cette dernière quantité tend vers $+\infty$, ce qui prouve bien que $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$.

3. Si pour toute fonction continue f , $S_n(f)(0)$ converge, alors

$$\sup_n |T_n(f)| < +\infty.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, on aurait $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, ce qui n'est pas le cas !