

POUR COMMENCER

Exercice 1 - Ensembles de définition - Première année - ★

1. Le logarithme est défini si $2x + y - 2 > 0$. On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x + y - 2 = 0$.
2. $1 - xy \geq 0$ si et seulement si $y \leq 1/x$, dans le cas où $x > 0$, $y \geq \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Le domaine de définition est la réunion de la partie située sous l'hyperbole $y = 1/x$ pour $x > 0$, de la partie située au-dessus de l'hyperbole pour $x < 0$, et de l'axe des ordonnées.
3. Les conditions sont $x \neq 0$ et $y - x > 0$. On trouve donc un demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite.
4. Les conditions sont cette fois $x^2 + y^2 - 1 > 0$ et $x^2 - y^2 \leq 4$. On trouve donc la couronne située entre les cercles de centre O et de rayon respectifs 1 et 2, le premier cercle n'étant pas dans le domaine, le second si.

Exercice 2 - Lignes de niveau - Première année - ★

1. D'abord, l'équation $y^2 = -1$ n'a pas de solutions, donc la courbe de niveaux... est vide. D'autre part, l'équation $y^2 = 1$ admet pour solution les droites $y = 1$ et $y = -1$.
2. L'équation $f(x, y) = 2$ donne

$$(x^2 + y^2)^2 = 16,$$

ce qui, compte tenu du fait que $x^2 + y^2 \geq 0$, donne le cercle

$$x^2 + y^2 = 4,$$

cercle centré à l'origine et de rayon 2.

CONTINUITÉ

Exercice 3 - - Première année - ★

On a :

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|,$$

on a $|xy| \leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}$. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x, y)| \leq \frac{3\|(x, y)\|_2^2 + \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}}{\|(x, y)\|_2} \leq 4\|(x, y)\|_2.$$

Ainsi, si (x, y) tend vers 0, on a $|f(x, y)|$ qui tend vers 0.

Exercice 4 - - Première année - ★

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t, t) = \frac{1}{2}.$$

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $1/2$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 5 - Diverses limites - Première année - *

1. On a

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y| \leq \|(x, y)\|_1.$$

La limite de f en $(0, 0)$ est donc 0.

2. Non! On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) = -\frac{3}{5}.$$

3. Non!

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = +\infty.$$

4. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2) . Or, $x^2 + y^2 - 1$ tend vers -1, et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1. f_1 tend donc vers -1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part, on a

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, et donc $f(x, y)$ tend vers $(-1, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES

Exercice 6 - Premières dérivées partielles - Première année - *

Il est facile de vérifier que par exemple $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable, et de même pour les autres fonctions. On trouve respectivement :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-x} \sin y.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cos(xy) - y(x^2 + y^2) \sin(xy), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy). \end{aligned}$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 + x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1 + x^2y^2}}.$$

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

Exercice 7 - Fonctions de classe C^1 - Première année - **

De la majoration $x^2 \leq x^2 + y^2$, on obtient que

$$|f(x, y)| \leq y^3,$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$. D'autre part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 y^2 \frac{3x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. On a en effet :

$$f(x, 0) - f(0, 0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$. Mais on a, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2|xy| \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{4} |3x^2 + y^2|.$$

On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$.

Exercice 8 - Composer ! - Première année - *

1. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x},$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x),$$

et symétriquement

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$

Pour ceux qui se perdent dans ce calcul formel, poser $u(x, y) = y$ et $v(x, y) = x$, on a $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots$$

2. On a :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

3. Notons, pour simplifier, $h(x) = f(x, x)$. On a donc :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)).$$

De même, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, h(x)).$$

4. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient la somme des quantités précédemment calculées.

Exercice 9 - EDP dans le bon sens - Première année - ★

La fonction f est de classe C^2 comme composée de fonctions toutes de classe C^2 . On a ensuite, en notant $t = y/x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{y}{x^2}g'_0(t) + g_1(t) - \frac{y}{x}g'_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2y}{x^3}g'_0(t) + \frac{y^2}{x^4}g''_0(t) + \frac{y^2}{x^3}g''_1(t) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x}g'_0(t) + g'_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}g'_0(t) - \frac{y}{x^3}g''_0(t) - \frac{y}{x^2}g''_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2}g''_0(t) + \frac{1}{x}g''_1(t). \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de faire la somme demandée pour obtenir le résultat.

Exercice 10 - - - ★

1. La fonction g est C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 . On a :

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

2. (a) On peut alors écrire $g(t) = tf(x, y)$, et le calcul de la dérivée de g donne $g'(t) = f(x, y)$. La comparaison avec l'expression obtenue à la question précédente donne le résultat.

(b) Il suffit d'appliquer la relation précédente pour $t = 0$. On a $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Exercice 11 - Différentielle - Première année - ★

1. f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y(x + y) + 1) e^{xy}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x(x + y) + 1) e^{xy}.$$

Ces fonctions sont continues sur \mathbb{R}^2 , la fonction f est différentiable, et on a :

$$df_{(x,y)}(h, k) = (h(y(x + y) + 1) + k(x(x + y) + 1))e^{xy}.$$

Avec la notation différentielle, on a (ce qu'on peut obtenir aussi en différentiant directement f), on a aussi

$$df = (y(x + y) + 1)e^{xy}dx + (x(x + y) + 1)e^{xy}dy.$$

2. f est clairement C^∞ , et est donc différentiable. On a donc

$$df = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz.$$

Exercice 12 - Différentielle - Première année - ★

1. f est clairement C^∞ , et est donc différentiable. On a donc

$$df = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz.$$

2. La différentielle de f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 13 - - L2/Math Spé/Oral Mines - ★

1. Remarquons que $f(x, x) = 1/2$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0 : f n'est pas continue en 0.
2. Puisque $f(x, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe, et vaut 0.
3. f ne peut pas être différentiable puisqu'elle n'est pas continue !

Exercice 14 - - Première année - ★

1. D'une part, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant par exemple l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on obtient :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

2. Remarquons d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y - y^5 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, on a $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| &\leq \frac{|x|^4 |y| + |y|^5 + 4|x|^2 |y|^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq \frac{6(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 6(x^2 + y^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$. Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur \mathbb{R}^2 . Par symétrie des rôles joués par x et y dans l'expression de $f(x, y)$, le même résultat est vrai pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On a donc prouvé que f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. Toute fonction de classe C^1 étant différentiable, f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 15 - - *Deuxième année* - **

- On a $(|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2 \geq 0$, ce qui donne l'inégalité demandé!
- Seule la continuité en $(0, 0)$ pose problème. On a donc $|f(x, y)| \leq |xy| |x^{p-1} y^{q-1}| / (x^2 - xy + y^2) \leq x^{p-1} y^{q-1}$. Cette dernière quantité tend vers 0, sauf si $p - 1 = q - 1 = 0$, c'est-à-dire sauf si $p + q = 2$. Dans ce cas, on a $f(x, x) = 1$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0. f n'est alors pas continue en $(0, 0)$.
- Si $p + q = 2$, la fonction n'est pas continue : a fortiori, elle ne peut pas être différentiable.
- Si $p + q = 3$, et que f est différentiable en $(0, 0)$, alors $f(x, y) = f(0, 0) + df_{(0,0)}(x, y) + o(\|(x, y)\|)$. Mais la différentielle est ici une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On note (ab) sa matrice. On obtient alors le résultat demandé. Ensuite, puisque $f(x, 0) = 0 = ax + o(|x|)$, on obtient que $a = 0$. De même en étudiant l'application $y \mapsto f(0, y)$, on trouve $b = 0$. Ainsi, $f(x, x) = o(|x|)$. Mais $f(x, x) = x$ (cf le calcul fait avant), qui n'est pas un $o(|x|)$.

Exercice 16 - **Matrices jacobiniennes** - *Première année* - *

Il suffit de vérifier que les fonctions coordonnées sont différentiables, et elles sont clairement C^∞ . On a respectivement

- 1.

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2.

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 - Fonctions homogènes - Première année - **

1. On pose $g(x, y) = f(tx, ty)$. On a d'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty).$$

D'autre part, en utilisant la relation $g(x, y) = t^r f(x, y)$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = t^r \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

On fait de même avec la dérivée partielle suivant y .

2. Supposons d'abord que f est homogène de degré r . On a donc :

$$f(tx, ty) = t^r f(x, y).$$

On dérive cette relation par rapport à t . On trouve :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = r t^{r-1} f(x, y).$$

Le résultat vient en appliquant le résultat de la première question, qui dit que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $r - 1$. Pour la réciproque, posons $\varphi(t) = f(tx, ty)$, définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . En utilisant la relation vérifiée par f (qu'on appelle relation d'Euler), on a :

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \frac{r}{t} f(tx, ty) = \frac{r}{t} \varphi(t).$$

La dérivée de l'application $t^{-r} \varphi(t)$ est nulle sur \mathbb{R}_+^* , elle est donc constante sur cet intervalle, et comme en outre $\varphi(1) = f(x, y)$, on démontre que f est bien homogène de degré r .

3. En écrivant la relation d'Euler pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (qui sont homogènes de degré $r - 1$), on obtient

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

et

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (r - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On ajoute alors x fois la première relation, et y fois la deuxième, puis on utilise la relation d'Euler pour f pour obtenir le résultat.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

Exercice 18 - En détails - Première année - ★

1. Par composition, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

2. On intègre cette équation. Pour tout v , il existe une constante $h(v)$ telle que

$$f(u, v) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Puisque la fonction $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est de classe C^1 , il en est de même de $v \mapsto h(v)$.

3. g est solution de l'équation si et seulement si il existe une fonction h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 telle que, pour tout u, v , on a :

$$g \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Pour revenir à x et y , il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{v-u}{2}$: on a donc

$$g(x, y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y).$$

Exercice 19 - Une autre... - Première année - ★★

Dans ce genre d'exercice, l'idée est de faire un changement de variables linéaire en posant $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, et en définissant $f(x, y) = F(u, v)$. Quand on ne donne pas explicitement le changement de variables dans l'énoncé, le mieux est encore de garder les constantes dans les calculs, et de les choisir au dernier moment de sorte que tout s'élimine. On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial F}{\partial u} + c \frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b \frac{\partial F}{\partial u} + d \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = (a - 3b) \frac{\partial F}{\partial u} + (c - 3d) \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Prenons $c = 3$, $d = 1$, $b = 0$ et $a = 1$ (qui est bien un changement de variables [inversible]). L'équation devient alors $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. F est fonction uniquement de v , et f est solution de l'équation si, et seulement si, il existe g une fonction C^1 définie sur \mathbb{R} et telle que

$$f(x, y) = g(3x + y).$$

Exercice 20 - Equation des cordes vibrantes - Première année - ★★

On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2 . La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

EXTRÉMA DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 21 - Sans les théorèmes - Première année - ★

1. On étudie les fonctions d'une variable $g(t) = f(a + te_1)$, et $h(t) = f(a + te_2)$. Ces fonctions admettent un extrémum en 0, et d'après la théorie classique des fonctions d'une variable réelle, on a $g'(0) = h'(0) = 0$. Maintenant, il est clair que

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a),$$

et de même pour $h'(0)$.

2. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4.$$

Le seul point où elles s'annulent est $(1, 2)$. En prenant ce point comme nouvelle origine, on est amené à étudier

$$f(1 + X, 2 + Y) = -5 + X^2 + Y^2$$

qui reste toujours supérieure à $-5 = f(1, 2)$. f présente un minimum local, et même global, en $(1, 2)$.

3. (a) Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 12y.$$

Ces dérivées partielles ne s'annulent simultanément qu'en $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -4)$ et $(4, -4)$ qui sont les points critiques de f .

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

- (b) On a $f(t, 0) \sim -6t^2 < f(0)$ pour $t \neq 0$, et $f(0, t) \sim 6t^2 > f(0)$ pour $t \neq 0$: f ne peut pas présenter d'extrémum local en $(0, 0)$.
- (c) Il est plus facile d'écrire la formule de Taylor avec les nouvelles coordonnées $x = 4 + X$, $y = Y$. D'autre part, le calcul des dérivées partielles secondes donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 12.$$

La formule de Taylor est donc :

$$f(4 + X, Y) = -32 + 6X^2 + 6Y^2 + \|(X, Y)\|^2 \varepsilon(\|(X, Y)\|).$$

Maintenant, la quantité $6X^2 + 6Y^2$ est toujours positive, ce qui prouve que f admet un minimum local en $(4, 0)$.

- (d) De même, on démontre qu'en $(0, -4)$, la fonction f présente un maximum local, mais qu'en $(4, -4)$, elle n'a pas d'extremum local.

Exercice 22 - Avec ou sans extrémum ? - L2/Math Spé - ★

On commence par chercher les points critiques de f . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2.$$

La fonction f admet donc un seul point critique qui est $(0, 0)$. Or, $f(0, y) = y^3$ est cette quantité est tantôt positive, tantôt négative suivant le signe de y , même si y est très proche de 0. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extrémum, et f n'admet pas d'extrémum sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 23 - Convexité et minimum - L2/Math Spé/Oral Mines - ★★

On va procéder par contraposée, ie on va prendre un point x de \mathbb{R}^n qui n'est pas un minimum global, et on va prouver que $df_x \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) < f(x)$. Alors, pour $t \in]0, 1[$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. On écrit le développement limité de f en x :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= f(x) + df_x(tx + (1-t)y - x) + o((1-t)) \\ &= f(x) + df_x((1-t)(y-x)) + o(1-t) \end{aligned}$$

De l'inégalité de convexité, on déduit

$$(1-t)df_x(y-x) + o(1-t) \leq (1-t)(f(y) - f(x)) \implies df_x(y-x) + o_{t \rightarrow 1}(1) \leq f(y) - f(x).$$

Faisant tendre t vers 1, on en déduit

$$df_x(y-x) \leq f(y) - f(x) < 0.$$

La différentielle de f en x ne peut donc pas être nulle.

Exercice 24 - Constante ! - L2/Math Spé - ★

Fixons $x \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $h \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \|h\|^2 \implies f(x+h) = f(x) + o(\|h\|).$$

Ceci signifie que f est différentiable en x et que $df_x = 0$. Comme \mathbb{R}^2 est convexe, ceci implique que f est constante.

Exercice 25 - La méthode des moindres carrés - L3/Master Enseignement - ★★★

1. En un point (m, p) où la fonction F admet un minimum, les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial m}(m, p)$ et $\frac{\partial F}{\partial p}(m, p)$ sont nulles. On trouve

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2 \sum_{k=1}^n x_k (y_k - mx_k - p) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2 \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p) = 0.$$

2. En un point où le maximum est atteint, les équations précédentes donnent immédiatement

$$p = \bar{y} - m\bar{x}$$

et

$$m \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - x_k \bar{x} \right) = \sum_{k=1}^n x_k (y_k - \bar{y}).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_k \bar{x}) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \neq 0$, il existe au plus un minimum, atteint pour

$$m = \frac{\sum_{k=1}^n x_k (y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = m = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}.$$

Reste à prouver maintenant que F admet effectivement un minimum.

3. (a) C'est un argument de compacité qui va nous permettre de conclure. Posons $A = F(0, 0)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que, pour $\|(m, p)\| \geq C$, on a $\|F(m, p)\| \geq A$. Posons U la boule (ouverte) de centre O et de rayon C , et soit K la boule fermée. K est une partie compacte de \mathbb{R}^2 , et F y est continue. Elle y admet donc un minimum, en (m_1, p_1) . Mais ce minimum est aussi le minimum de la fonction sur \mathbb{R}^2 , puisque si $(m, p) \notin K$, on a

$$F(m, p) \geq A = F(0, 0) \geq F(m_1, p_1).$$

Ainsi, F admet un minimum sur \mathbb{R}^2 et donc une droite des moindres carrés existe.

- (b) Il suffit, pour chaque i , d'écrire

$$(y_i - mx_i - p)^2 = (x_i m + p)^2 - 2x_i y_i m - 2y_i p + y_i^2 := u_i^2(m, p) + v_i(m, p) + y_i^2,$$

avec u_i et v_i des formes linéaires.

- (c) La condition entraîne en particulier qu'au moins deux des x_i sont différents (sinon, ils seraient tous égaux à leur moyenne). Supposons donc $x_i \neq x_j$ et prouvons que (u_i, u_j) est libre. Si on a une relation $au_i + bu_j = 0$, alors en évaluant en $m = 1, p = 0$ puis en $m = 0, p = 1$, on trouve le système

$$\begin{cases} ax_i + bx_j &= 0 \\ a + b &= 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a = b = 0$. Le système est donc libre, et le rang de la famille est supérieur ou égal à 2. Puisque l'espace vectoriel des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 est de dimension 2, le rang est au plus de 2. Il vaut donc exactement 2.

- (d) Il suffit de poser $R(m, p) = \sum_{i=3}^n u_i^2(m, p)$ et $v(m, p) = au_1(m, p) + bu_2(m, p)$.

- (e) Définissons

$$N(m, p) = |u_1(m, p)| + |u_2(m, p)|.$$

N est une norme sur \mathbb{R}^2 . La seule chose non triviale est de vérifier que si $N(m, p) = 0$, alors $(m, p) = 0$. Mais $(m, p) \mapsto m$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 , elle s'écrit donc $m = eu_1(m, p) + fu_2(m, p)$, et donc si $N(m, p) = 0$, alors $m = 0$. De même, on prouve que $p = 0$. Maintenant, on sait que sur \mathbb{R}^2 , toutes les normes sont équivalentes. La condition $\|(m, p)\| \rightarrow +\infty$ entraîne donc $N(m, p) \rightarrow +\infty$.

- (f) En résumant le travail fait précédemment, il suffit de prouver que $N(m, p) \rightarrow +\infty$ entraîne

$$u_1^2(m, p) + au_1(m, p) + u_2^2(m, p) + bu_2(m, p) \rightarrow +\infty.$$

Mais c'est clair car on a la somme de deux polynômes du second degré, l'un en $u_1(m, p)$, l'autre en $u_2(m, p)$, de coefficient dominant strictement positif.

4. Il faut retransformer l'équation théorique en équation linéaire. Pour cela, on pose

$$z = \frac{1}{0,01 - y} = \alpha t + \beta.$$

Le tableau des valeurs de z , arrondies à l'unité, en fonction du temps est :

$t(sec)$	0	180	360	480	600	900	1200
z	100	135	170	193	216	275	332

L'application des formules précédentes donne alors

$$\alpha \simeq 0,194 \text{ et } \beta \simeq 100,143.$$

Exercice 26 - Extrema liés - L3/M1 - ***

Notons $g(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$. On commence par calculer les diverses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay \exp(ay), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax \exp(ay), \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 1.$$

En un point (x, y) de G où f atteint un extrémum (sur G), les différentielles sont proportionnelles. On en déduit que

$$\frac{ay \exp(axy)}{3x^2 + 1} = \frac{ax \exp(axy)}{3y^2 + 1}$$

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

ce qui entraîne $3y^3 + y = 3x^3 + x$. Maintenant, la fonction $t \mapsto 3t^3 + t$ est strictement croissante, donc injective, et on en déduit qu'en un point $(x, y) \in G$ où on a un extrémum lié, alors $x = y$. Il vient $x^3 + x - 2 = 0$, dont la seule racine réelle est $x = 1$.

Il faut maintenant étudier ce qui se passe en $(1,1)$. Y-a-t-il un extrémum ? Est-ce un minimum ? Un maximum ? En fait, il suffit de remarquer qu'en les points de $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ pour lesquels $|x|$ est grand, alors $|y|$ est grand lui aussi, mais x et y sont de signe opposés. Autrement dit,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty, (x,y) \in G} f(x, y) = 0.$$

Ainsi, par compacité, la fonction admet forcément un maximum qui est atteint en $(1, 1)$.

ANALYSE VECTORIELLE

Exercice 27 - Calculs effectifs - Première année - ★

- (a) $\text{grad}(f) = (y^2, 2xy - z^2, -2yz)$.
(b) $\text{grad}(f) = (yz \sin(xy) + xy^2z \cos(xy), xz \sin(xy) + x^2yz \cos(xy), xy \sin(xy))$.
- (a) $\text{div}(f) = 8xy$.
(b) $\text{div}(f) = y \cos(xy) - x \sin(xz)$.
(c) $\text{div}(f) = 0$.

Exercice 28 - Laplacien en coordonnées polaires - Première année - ★

On commence par inverser le changement de variables : on a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(y/x)$. On en déduit :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta.$$

De même, on a :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de composition des dérivations (on note comme usuellement de la même façon f et F) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

De même, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

On dérive ensuite une seconde fois. Après simplifications, il vient :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 29 - Potentiel scalaire - Première année - ★

D'une part, on peut prouver l'existence théorique d'un tel champ scalaire, en observant que les champs de vecteurs sont définis sur des ouverts étoilés, et que leur rotationnel est nul. D'autre part, il est possible de les "intégrer". On cherche en effet :

Exercices - Fonctions de plusieurs variables : corrigé

1. f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} tel que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2$. On résoud ce système d'équation aux dérivées partielles : la deuxième équation donne par exemple $f(x, y, z) = x^2y + h(x, z)$, et utilisant les deux autres équations, on trouve :

$$f(x, y, z) = x^2y + xz^3 + cste.$$

2. f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

Les fonctions f qui conviennent sont donc $f(x, y) = \frac{y}{x-y} + cste$.