Exercice 1 - Le plus facile des systèmes différentiels - *L2/Math Spé* - $\star$

D'abord, l'équation $z''=0$ donne facilement $z(t)=at+b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u'=x''+iy''=\omega y'-i\omega x'=-i\omega u.$$

On en déduit que $u(t)=(c+id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & c\cos(\omega t)+d\sin(\omega t)\\ y'(t) & = & d\cos(\omega t)-c\sin(\omega t). \end{array}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & c'\sin(\omega t)-d'\cos(\omega t)\\ y'(t) & = & d'\sin(\omega t)+c'\cos(\omega t) \end{array}$$

où on a posé $c'=c/\omega$ et $d'=d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Exercice 2 - Diagonalisable ! - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Introduisons la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X'=AX$ avec $X(t)=\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $X^2(X-6)$. 0 est valeur propre double, mais A est de rang 1 et donc $\ker(A)$ est de dimension 2. Une base de $\ker(A)$ est donnée par les vecteurs $u_1=(1,0,1)$ et $u_2=(2,-1,0)$. D'autre part, une base de $\ker(A-6I)$ est donné par $u_3=(1,2,-1)$. Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant
$$X(t)=\lambda u_1+\mu u_2+\gamma e^{6t}u_3.$$

2. Introduisons cette fois la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X'=AX$ avec $X(t)=\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X(X-1)(X-2)$, de sorte que ses valeurs propres sont $0,1,2$, de vecteurs propres respectifs associés $u_0=(1,1,-1)$, $u_1=(0,-1,1)$, et $u_2=(1,1,1)$. Ainsi, les solutions sont données par les triplets
$$X(t)=\lambda u_0+\mu e^t u_1+\gamma e^{2t}u_2.$$

Exercice 3 - Diagonalisable...mais sur les complexes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Les valeurs propres (complexes) de A sont 2, $1+i$ et $1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est donné par $(1,1,1)$. Pour les deux autres valeurs propres, et pour trouver les solutions réelles, on va appliquer la méthode des coefficients indéterminés. On cherche donc une solution $X(t)$ s'écrivant
$$X(t)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t\cos t+\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}e^t\sin t$$
et on cherche les relations sur les coefficients $a,\dots,f$ pour que $X(t)$ soit solution du système. La relation $X'(t)=AX(t)$ donne le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl}(a+b)e^t\cos t+(d+e)e^t\sin t&=&(a+d)e^t\cos t+(-a+d)e^t\sin t\\(-a+2b+c)e^t\cos t+(-d+2e+f)e^t\sin t&=&(b+e)e^t\cos t+(-b+e)e^t\sin t\\(a+c)e^t\cos t+(d+f)e^t\sin t&=&(c+f)e^t\cos t+(-c+f)e^t\sin t\end{array}\right.$$
Par identification, on trouve
$$\left\{\begin{array}{rcl}b&=&d\\e&=&-a\\b&=&-c\\e&=&-f\\a&=&f\\d&=&-c\end{array}\right.$$
Les deux dernières équations sont inutiles car elles se déduisent des précédentes. On peut alors choisir a et b comme paramètre, et on obtient un espace vectoriel de dimension deux de solutions, décrit par
$$\lambda e^t\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix}+\mu e^t\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\\-\cos t\end{pmatrix}.$$
En conclusion, un triplet $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ est solution du système ssi il existe trois constantes α,λ et μ telles que
$$\left\{\begin{array}{l}x_1(t)=\alpha e^{2t}+\lambda e^t\cos t+\mu e^t\sin t\\x_2(t)=\alpha e^{2t}-\lambda e^t\sin t+\mu e^t\cos t\\x_3(t)=\alpha e^{2t}+\lambda e^t\sin t-\mu e^t\cos t\end{array}\right.$$
2. Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $V_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à i est $V_i=\begin{pmatrix}i\\1\\2\end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$ est $\overline{V_i}$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(V_ie^{it})$ et $\Im m(V_ie^{it})$. On trouve alors les solutions (indépendantes)
$$\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\2\cos t\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est donc

$$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu\sin t + \nu\cos t \\ -3\lambda e^t + \mu\cos t + \nu\sin t \\ -4\lambda e^t + 2\mu\cos t + 2\nu\sin t \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - Systèmes non diagonalisables - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. On calcule le polynôme caractéristique de A qui est $(X-2)^2(X-1)$. On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre 1. On trouve $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La fonction $t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une solution. Malheureusement, si on calcule $A - 2I$, on obtient que la matrice est de rang 2, et donc le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1 : la matrice n'est pas diagonalisable !
On applique alors la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions associé à cette valeur propre. Autrement dit, on cherche les conditions sur a, b, c, d, e, f pour que la fonction

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

soit solution de $X'(t) = AX(t)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2at + (a + 2b) \\ 2ct + (c + 2d) \\ 2et + (e + 2f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c+e)t + 2(d+f) \\ (-a + 2c + 2e)t + (-b + 2d + 2f) \\ (-a + c + 3e)t + (-b + d + 3f) \end{pmatrix}$$

On identifie d'abord les termes de degré 1. On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c + e \\ 2c & = & -a + 2c + 2e \\ 2e & = & -a + c + 3e \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - c - e & = & 0 \\ a - 2e & = & 0 \\ a - c - e & = & 0 \end{array} \right.$$

La première et la troisième ligne sont identiques. On trouve donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2e \\ c & = & e \\ e & = & e \end{array} \right.$$

On identifie ensuite les termes constants. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b & = & 2(d + f) \\ c + 2d & = & -b + 2d + 2f \\ e + 2f & = & -b + d + 3f \end{array} \right.$$

On remplace a et c par leur valeur en fonction de e (qui est un paramètre), puis on simplifie. Deux équations sont identiques et on trouve que le système précédent est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -b+2c+2f & = & e \\ -b+2f & = & e \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2d-e \\ d & = & d \\ f & = & d \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation est

$$\lambda e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2et+2d-e \\ et+d \\ et+d \end{pmatrix},$$

λ, d et e étant des paramètres réels.

2. Le polynôme caractéristique de A est $X(X-1)^2$. On peut vérifier que $A(A-I) \neq 0$, et donc que le polynôme minimal de A est $X(X-1)^2$. La matrice A n'est pas diagonalisable. On recherche ensuite la valeur propre 0. Un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une solution. On étudie ensuite la valeur propre 2 en appliquant la méthode des coefficients indéterminés. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^t$ et on étudie à quelle condition $X'(t) = AX(t)$, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} at+(a+b) & = & (-6a+5c+3e)t+(-6b+5d+3f) \\ ct+(c+d) & = & (-8a+7c+4e)t+(-8b+7d+4f) \\ et+(e+f) & = & (-2a+c+e)t+(-2b+d+f) \end{array}\right.$$

On peut alors résoudre ce système (en fait, exprimer tous les paramètres en fonction de 2). On peut aussi utiliser la méthode suivante. On cherche une solution sous la forme

$$X(t) = e^t(tV_2 + V_1).$$

On a $X'(t) = AX(t)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} AV_2 & = & V_2 \\ AV_1 & = & V_1+V_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} V_2 & = & (A-I)V_1 \\ (A-I)^2V_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

On cherche alors l'expression d'un élément V_1 de $\ker(A-I)^2$. Il est facile de vérifier que le noyau de $(A-I)^2$ est le plan d'équation $3X-2Y-Z=0$, dont une base est constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. V_1 s'écrit donc

$$V_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avec λ, μ des réels. On en déduit

$$V_2 = (A - I)V_1 = (\lambda + 2\mu)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions s'écrivent donc

$$\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \lambda + 3\mu \end{pmatrix} + (\lambda + 2\mu)te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 - Avec l'exponentielle de matrice - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(X) = (X-1)^3$.
2. Posons $N = A - I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N. En effet, on a
$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n N^n = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2.$$
D'autre part, puisque $tA = tI_3 + tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a
$$\exp(tA) = \exp(tI_3)\exp(tN) = e^t\left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right).$$
On en déduit
$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2 + t \\ t & t^2 - 2t + 1 & t^2 - t \\ -t & -t^2 + 2t & -t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Alors $X(t) = \exp(tA)X(0)$. En notant $X(0) = (a, b, c)$, on trouve
$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & a(t+1)e^t + bt^2e^t + c(t^2+t)e^t \\ x_2(t) & = & ate^t + b(t^2 - 2t + 1)e^t + c(t^2 - t)e^t \\ x_3(t) & = & -ate^t + b(-t^2 + 2t)e^t + c(-t^2 + 2t + 1)e^t. \end{array}$$

Exercice 6 - Avec l'exponentielle (bis) - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= e^a \left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}\right)\left(I_3 + cB^2\right) \\ &= e^a \left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c\right)B^2\right)\end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2}+c\right)e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $X' = AX$ est alors donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, soit, en posant $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$X(t) = \alpha e^{at}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta e^{at}\begin{pmatrix}bt\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma e^{at}\begin{pmatrix}ct+\frac{b^2t^2}{2}\\bt\\1\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 - Avec second membre - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs $(-3, 4)$ et $(4, -4)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t) = APY(t) + B(t) \iff Y(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{-3t+4e^{3t}}{4t-4e^{3t}}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t)+t \\ y_2'(t) &= 3y_2(t)+e^{3t}. \end{cases}$$

Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que

$$\begin{cases} y_1(t) &= \lambda e^{2t}-\frac{1}{4} \\ y_2(t) &= \mu e^{3t}+te^{3t} \end{cases}$$

Revenant à $X(t)$, on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) &= -3\lambda e^{2t}+4\mu e^{3t}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}+4te^{3t} \\ x_2(t) &= 4\lambda e^{2t}-4\mu e^{3t}-2t-1-4te^{3t}. \end{cases}$$

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est diagonalisable que sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont $-1+2i$ et $-1-2i$, avec vecteurs propres respectifs $(1-i, 2i)$ et $(1+i, -2i)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t) = APY(t)+B(t) \iff Y(t) = P^{-1}APY(t)+P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{t}{0}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= (-1+2i)y_1(t)+t/2 \\ y_2'(t) &= (-1-2i)y_2(t)+t/2. \end{cases}$$

Ses solutions (complexes) sont

$$\begin{cases} y_1(t) &= c_1e^{(-1+2i)t}+\frac{t}{10}+\frac{3}{50}+\frac{it}{5}-\frac{2i}{25} \\ y_2(t) &= c_1e^{(-1-2i)t}+\frac{t}{10}+\frac{3}{50}-\frac{it}{5}+\frac{2i}{25} \end{cases}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si on revient à x_1 et x_2, et en remplaçant $e^{(-1+2i)t}$ par $e^{-t}(\cos(2t)+i\sin(2t))$, on trouve

$$\begin{cases} x_1(t) &= ((c_1+c_2)-i(c_1-c_2))e^{-t}\cos(2t)+(i(c_1-c_2)+(c_1+c_2))e^{-t}\sin(2t)+\frac{3t}{5}-\frac{1}{25} \\ x_2(t) &= 2i(c_1-c_2)e^{-t}\cos(2t)-2(c_1+c_2)e^{-t}\sin(2t)-\frac{4t}{5}+\frac{8}{25}. \end{cases}$$

On pose $\lambda = c_1+c_2$ et $\mu = i(c_1-c_2)$. Le couple (λ, μ) parcourt $\mathbb{C}^2$ lorsque (c_1, c_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, et les solutions complexes du système sont

$$\begin{cases} x_1(t) &= (\lambda-\mu)e^{-t}\cos(2t)+(\lambda+\mu)e^{-t}\sin(2t)+\frac{3t}{5}-\frac{1}{25} \\ x_2(t) &= 2\mu e^{-t}\cos(2t)-2\lambda e^{-t}\sin(2t)-\frac{4t}{5}+\frac{8}{25}. \end{cases}$$

Pour obtenir les solutions réelles, il suffit de prendre λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 - Avec second membre, et pas à coefficients constants - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On considère le système homogène, et on obtient avec le changement de variables associé

$$u'(t) = \big(-2tx(t) + x'(t)\big)e^{-t^2} = -v(t)$$

et

$$v'(t) = \big(-2ty(t) + y'(t)\big)e^{-t^2} = u(t).$$

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -v(t) \\ v'(t) & = & u(t) \end{array}\right.$$

possède comme système fondamental de solutions les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Revenant au système initial, on trouve un système fondamental de solutions de l'équation homogène donné par les deux vecteurs

$$h_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)e^{t^2} \\ \sin(t)e^{t^2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sin(t)e^{t^2} \\ \cos(t)e^{t^2} \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes. On pose donc $f(t) = \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t)$, et on trouve que

$$\lambda'(t)h_1(t) + \mu'(t)h_2(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\lambda_1'(t) = t^e - t^2$ et $\lambda_2'(t) = 0$. Une solution particulière est donc obtenue par $\lambda_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $\lambda_2(t) = 0$. La solution générale de l'équation est donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \lambda\cos(t)e^{t^2} - \mu\sin(t)e^{t^2} - \frac{1}{2}\cos(t) \\ y(t) & = & \lambda\sin(t)e^{t^2} + \mu\cos(t)e^{t^2} - \frac{1}{2}\sin(t) \end{array}\right.$$

Exercice 9 - Ordre plus grand - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Donnons deux méthodes. La première est de transformer le système en système d'ordre 1, mais de taille 4 (comme on change une équation linéaire d'ordre 2 en un système d'ordre 1). Pour cela, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Alors, on a $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de résoudre le système comme un système classique.
Une autre méthode, plus astucieuse, est de regarder un peu le système et d'observer la symétrie entre $x(t)$ et $y(t)$. Ceci incite à poser $u = x + y$ et $v = x - y$. Alors u et v sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcl} u''(t) - 2u'(t) + u(t) &=& 0 \\ v''(t) - v(t) &=& 0 \end{array}\right.$$

On résoud ces équations, et on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& (\lambda t + \mu)e^t \\ v(t) &=& \alpha e^t + \beta e^{-t} \end{array}\right.$$

On retrouve alors facilement x et y.

Exercice 10 - Comportement à l'infini des systèmes 2x2 - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On peut réduire la matrice A sur $\mathbb{C}$. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est égale à l'une des deux matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, le système est équivalent à

$$PY'(t) = APY(t) \iff Y'(t) = TY(t).$$

Toutes les normes sur $\mathbb{C}^2$ étant équivalentes, il suffit de vérifier que les lignes de $Y(t)$ sont toujours bornées.

- Dans le premier cas (A diagonalisable), les solutions sont les fonctions de la forme

  $$y_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\mu t}.$$

  Ces deux fonctions tendent toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$ et $\Re e(\mu) < 0$.
- Dans le second cas (A trigonalisable), les solutions sont de la forme

  $$y_1(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2) \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}.$$

  Par comparaison des fonctions exponentielles et des polynômes, ceci tend toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$.