

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

Exercice 1 - Tangentes aux courbes intégrales - L1/L2/Math Sup/Math Spé - ★

Soit y une solution de l'équation. Sa tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y - y(x_0) = (a(x_0)y(x_0) + b(x_0))(x - x_0).$$

Par tout point (x_0, λ) il passe une courbe intégrale (ou encore il y a une unique solution avec $y(x_0) = \lambda$), et il s'agit de démontrer que toutes les droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, où (D_λ) est la droite d'équation

$$y - \lambda = (a(x_0)\lambda + b(x_0))(x - x_0)$$

sont parallèles ou concourantes. Si $a(x_0) = 0$, il est clair qu'elles sont parallèles, et parallèles à $y = b(x_0)x$. Sinon, cherchons le point d'intersection, pour $\lambda \neq \mu$, de D_λ et D_μ . On doit résoudre le système

$$\begin{cases} y - \lambda &= (a(x_0)\lambda + b(x_0))(x - x_0) \\ y - \mu &= (a(x_0)\mu + b(x_0))(x - x_0) \end{cases}$$

On trouve que le point d'intersection a pour coordonnées $(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, \frac{-b(x_0)}{a(x_0)})$. Il ne dépend pas de λ ni de μ . Toutes les droites D_λ passent par ce point !

Exercice 2 - Comportement à l'infini d'une solution - L1/Math Sup - ★★

On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = - \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Or, pour $t \geq 0$, on a $e^{t^2} \geq 1$ d'où l'on déduit que pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 = x.$$

On en déduit que $A(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc par composition et produit que $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 - Fonction non-solution d'une équation différentielle - L1/L2/Math Sup/Math Spé - ★★

Il est clair que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* . On montre aisément par récurrence sur n que ses dérivées sont de la forme

$$t \mapsto P_n(t)e^{-1/t^2},$$

où les P_n sont des polynômes. Ainsi, pour chaque entier n , $f^{(n)}$ admet une limite en 0 égale à 0. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^∞ , avec $f^{(n)}(0) = 0$. Si f était solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n ,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0,$$

elle vérifierait aussi la condition initiale $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Or, d'après le théorème de Cauchy linéaire, cette équation n'admet qu'une seule solution pour ce problème de Cauchy. Comme 0 est solution et que f n'est pas identiquement nulle, on obtient une contradiction.

Exercice 4 - Solutions bornées - L3/Math Spé - ★★

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

1. Soit y une solution bornée. On a, pour tout $t > 0$,

$$y'(t) - y(0) = \int_0^t y''(u) du = - \int_0^t f(u)y(u) du.$$

Or, la fonction $f y$, produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée, est elle-même intégrable, et donc $y'(t) = \int_0^t f(u)y(u) du$ admet une limite au voisinage de $+\infty$. Cette limite ne peut être que nulle. En effet, si $y(t) \rightarrow \ell$ avec par exemple $\ell > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que $y'(t) \geq \ell/2$ pour $t \geq A$. Mais alors

$$y(t) - y(A) \geq \ell(t - A)/2$$

et donc y ne peut pas être bornée.

2. Il suffit de dériver W :

$$W'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = -f(t)y_1(t)y_2(t) + f(t)y_1(t)y_2(t) = 0.$$

La dérivée de W' est nulle sur \mathbb{R}_+ , donc W est constant sur \mathbb{R}_+ .

3. Supposons que toutes les solutions soient bornées, et considérons deux solutions indépendantes y_1 et y_2 . Alors leur déterminant wronskien est constant, et non nul puisque les deux solutions sont indépendantes. Mais, puisque y_1' et y_2' tendent vers 0 en $+\infty$, on en déduit que $W(t)$ tend aussi vers 0 en $+\infty$. C'est bien sûr une contradiction, et donc il existe des solutions non-bornées.

Exercice 5 - Solutions périodiques - L1/L2/Math Sup/Math Spé - **

La solution générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = \left(\alpha + \int_0^x b(t)e^{-A(t)} dt \right) e^{A(x)}$$

où $A(x) = \int_0^x a(t) dt$. Notons que

$$A(x+1) = A(x) + \int_x^{x+1} a(t) dt = A(x) + \int_0^1 a(t) dt,$$

et posons $\lambda = \int_0^1 a(t) dt$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} y(x+1) &= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)} dt + \int_1^x b(t)e^{-A(t)} dt \right) e^{A(x+1)} \\ &= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)} dt + \int_0^x b(t)e^{-\lambda - A(t)} dt \right) e^{A(x)+\lambda} \\ &= y(x) + \left(\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda \right) e^{A(x)} \end{aligned}$$

où on a posé $\mu = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)} dt$. Autrement dit, f est 1-périodique si et seulement

$$\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, l'équation admet une unique solution 1-périodique, donnée par

$$\alpha = \frac{\mu e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, alors toute solution est 1-périodique.

Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, alors il n'y a aucune solution 1-périodique.

Exercice 6 - Solutions impaires - *L/Math Sup* - ★★★

Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

- toute fonction impaire vaut 0 en 0 ;
- L'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E) , elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0 . Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E) . En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(t) + a(-t)y_0(t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E) , a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E) , et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0 , et donc y_0 est paire. On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a , puis méthode de variation de la constante).

Exercice 7 - Solutions périodiques d'équations différentielles - *L2/Math Spé* - ★★

- (a) On démontre par récurrence sur $k \geq 2$ que y est C^k . Pour $k = 2$, $y'' = -\varphi y$ est continue, donc y est C^2 . Supposons la propriété démontrée au rang k et prouvons-la au rang $k + 1$. Si y est C^k , alors $y'' = -\varphi y$ est aussi C^k . En particulier, y est C^{k+1} .
- (b) Posons $f(x) = y(-x)$, de sorte que $f'(x) = -y'(-x)$ et $f''(x) = y''(-x)$. On a donc

$$f''(x) + \varphi(x)f(x) = y''(-x) + \varphi(x)y(-x) = y''(-x) + \varphi(-x)y(-x) = 0$$

et donc f est aussi solution de l'équation différentielle.

- (c) Posons $g_0(x) = f_0(-x)$, solution de l'équation différentielle sur I . Elle vérifie de plus les mêmes conditions initiales que f_0 , à savoir $g_0(0) = f_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = -f_0'(0) = 0$. Ainsi, $f_0 = g_0$ et f_0 est paire. Pour prouver que f_1 est impaire, on pose $g_1(x) = -f_1(-x)$, et on vérifie que g_1 est solution de l'équation avec les mêmes conditions initiales que f_1 .
- (d) Remarquons que (f_0, f_1) est une famille libre. En effet, si $f_1 = C f_0$, alors $f_1' = C f_0'$ et ceci est incompatible avec $f_1'(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$. Ainsi, la famille (f_0, f_1) est une base de l'ensemble des solutions de (E) . Donc la solution générale de (E) s'écrit $\lambda f_0 + \mu f_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons y une telle solution. Pour qu'elle soit paire, il faut que $y(-x) = y(x)$. Mais,

$$y(-x) = \lambda f_0(x) - \mu f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = y(x).$$

La famille (f_0, f_1) étant libre, on en déduit que $\mu = -\mu$, soit $\mu = 0$, et seuls les multiples de f_0 sont solutions paires de l'équation. De même, seuls les multiples de f_1 sont solutions impaires de l'équation.

- (a) Il s'agit d'une vérification immédiate.

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

- (b) Puisque $x \mapsto f_0(x + 2\pi)$ est solution de l'équation, on sait qu'il existe des constantes w_{00} et w_{10} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x + 2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x).$$

Faisant $x = 0$, on trouve $w_{00} = f_0(2\pi)$. Dérivant l'équation, et faisant $x = 0$, on trouve $w_{10} = f_0'(2\pi)$. On utilise le même raisonnement pour f_1 .

- (c) Soit y une solution de (E) , $y = \lambda f_0 + \mu f_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x + 2\pi) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x).$$

Puisque (f_0, f_1) est une base de solutions de (E) , y est une solution 2π -périodique si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda w_{00} + \mu w_{01} = \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} = \mu \end{cases}$$

Autrement dit, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est vecteur propre de W pour la valeur propre 1. Réciproquement, si $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est vecteur propre de W pour la valeur propre 1, alors $y = \lambda f_0 + \mu f_1$ est solution 2π -périodique de (E) .

Exercice 8 - Zéros isolés - L3/Math Spé - **

Soit y une solution non-nulle de l'équation et soit t_0 un zéro de y . Remarquons que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. D'après la partie unicité du théorème de Cauchy (dans sa version linéaire adaptée aux équations d'ordre p), on est sûr qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$ (sinon y serait la fonction nulle). Soit p le plus petit des entiers k tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$. Alors, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de t_0 , on a

$$y(t) \sim_{t_0} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} (t - t_0)^p.$$

Ainsi, la fonction ne s'annule pas dans un voisinage de t_0 ailleurs qu'en t_0 .

Exercice 9 - Au moins/au plus un zéro! - L3/Math Spé - ***

1. On considère une solution y de l'équation différentielle qui ne s'annule pas. Quitte à changer y en $-y$, on peut supposer $y > 0$, et donc $y'' \leq 0$. On en déduit que la fonction y' est décroissante. De plus, y' n'est pas identiquement nulle, car sinon y'' le serait, et donc, puisque $y'' + py = 0$ et y ne s'annule pas, p serait aussi identiquement nul ce qui n'est pas. Soit donc un point a tel que $y'(a) \neq 0$.
 - Si $y'(a) > 0$ alors $y'(t) \geq y'(a)$ pour $t < a$, et donc, toujours pour $t < a$, on aurait

$$y(a) - y(t) = \int_t^a y'(u) du \geq (a - t)y'(a)$$

et donc

$$y(t) \leq y(a) + (t - a)y'(a)$$

ce qui prouve que $y(t)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, ce qui contredit $y > 0$.

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

- Si $y'(a) < 0$, alors $y'(t) \leq y'(a) < 0$ pour $t \geq a$, d'où on tire, pour $t \geq a$,

$$y(t) - y(a) = \int_a^t y'(u) du \leq y'(a)(t - a)$$

ce qui prouve que $y(t)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit $y > 0$.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. C'est donc que y doit s'annuler au moins une fois.

2. Supposons que z est non-nulle et s'annule au moins une fois. Soit a tel que $z(a) = 0$. Alors $z'(a) \neq 0$ puisque la seule solution de l'équation valant $z(a) = 0$ et $z'(a) = 0$ est la solution nulle. Supposons qu'il existe un autre point c où z s'annule. On peut supposer $c > a$ et on pose $b = \inf\{x > a; z(x) = 0\}$. On sait que $b > a$ car $z'(a) \neq 0$ et donc a est un zéro isolé de z . Quitte à changer z en $-z$, on peut supposer que z est strictement positif sur $]a, b[$. Ceci entraîne que $z'(a) \geq 0$ et $z'(b) \leq 0$. Mais alors, $z'' = pz$ est strictement positif sur $]a, b[$ et donc z' est strictement croissante. Ceci contredit que $z'(a) \geq 0$ et $z'(b) \leq 0$.

Exercice 10 - Principe d'entrelacement des zéros de Sturm - L3/Math Spé/Agrégation externe - ***

1. (a) Soit a un zéro de f . Alors, par unicité au problème de Cauchy, et puisque f n'est pas la solution nulle, on sait que $f'(a) \neq 0$. Donc, par la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) \sim_a f'(a)(x - a).$$

Ainsi, au voisinage de a , f ne s'annule qu'en a .

- (b) i. On dérive W . Utilisant le fait que f et g sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant f'' et g'' par leur valeur, on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On peut donc intégrer W , et on trouve

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(u) du\right).$$

- ii. On peut remarquer que $W(t_0)$ est le déterminant des deux vecteurs $(f(t_0), f'(t_0))$ et $(g(t_0), g'(t_0))$. Ces deux vecteurs sont indépendants : s'ils étaient liés, par unicité au problème de Cauchy, on aurait f et g liés, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Donc $W(t_0) \neq 0$.
- iii. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$. D'après les deux questions précédentes, $W(\alpha)$ et $W(\beta)$ sont de même signe, celui de $W(t_0)$. De plus,

$$W(\alpha) = -g(\alpha)f'(\alpha), \quad W(\beta) = -g(\beta)f'(\beta).$$

Or, $f'(\alpha) \geq 0$ et $f'(\beta) \leq 0$ car $f \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Ceci entraîne que $g(\beta)$ est du signe de $W(t_0)$, tandis que le signe de $g(\alpha)$ est l'opposé du signe de $W(t_0)$. Ainsi, $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont de signes opposés. On en déduit que g s'annule au moins une fois dans $[\alpha, \beta]$. En fait, en inversant les rôles joués par f et g , elle s'annule *exactement* une fois dans $] \alpha, \beta [$.

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

2. Comme à la question précédente, on peut toujours supposer que $f \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Introduisons le "pseudo-wronskien" $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$, que l'on dérive pour trouver

$$W'(t) = f(t)g(t)(p - q).$$

En vue d'une contradiction, supposons que g ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$, par exemple $g > 0$. Alors W est décroissante sur $[\alpha, \beta]$ et donc $W(\beta) \leq W(\alpha)$. Mais, $W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) < 0$ tandis que $W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) > 0$. C'est une contradiction.

3. On introduit l'équation $y'' + M^2y = 0$, dont les solutions sont proportionnelles à $t \mapsto \sin(Mt + \theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
- Si $q \leq M^2$, soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f . Alors, on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g(t) = \sin(Mt + \theta)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Mais alors ceci contredit le résultat de la question précédente...
 - Si $q \geq M^2$, soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de longueur π/M , et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g(t) = \sin(Mt + \theta)$ s'annule en α et en β . En appliquant la question précédente (attention, il faut permuter les rôles joués par f et $g!$), on voit que f admet un zéro dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
4. (a) Pour le niveau de l'exercice, c'est très simple... On trouve

$$v'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) = 0.$$

- (b) Puisque y et v ont les mêmes zéros, on peut discuter sur v . Posant $q(x) = 1 - (4\lambda^2 - 1)/(4x^2)$, on voit que
- Si $\lambda \geq 1/2$, alors $q(x) \leq 1$: deux zéros consécutifs sont séparés d'au moins π .
 - Si $\lambda \leq 1/2$, alors $q(x) \geq 1$: deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus π .

Exercice 11 - Stabilité des systèmes linéaires - L3/Prépa Agreg - ★★★

Remarquons que la stabilité (resp. la stabilité asymptotique) ne dépend pas du fait de travailler avec des solutions réelles ou complexes. On peut donc supposer que la matrice A est donnée sous sa forme réduite de Jordan. La solution générale vérifie alors $X(t) = e^{tA}X(0)$. Ecrivons

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots \\ 0 & J(2) & 0 \dots \\ \vdots & 0 & \ddots \\ & & & J(p) \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{tJ(2)} & 0 \dots \\ \vdots & 0 & \ddots \\ & & & e^{tJ(p)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix},$$

où les $J(i)$ sont les blocs de Jordan de A . Il vient

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{tJ(1)}X(1) \\ e^{tJ(2)}X(2) \\ \vdots \\ e^{tJ(p)}X(p) \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'il s'agit de prouver à quelle condition sur un bloc de Jordan J de taille d , pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\|e^{tJ}X\| < \eta \text{ dès que } \|X\| < \eta \text{ et } \|e^{tJ}X\| \rightarrow 0 \text{ dès que } \|X\| < \eta.$$

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

On écrit

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

On calcule l'exponentielle de J en la décomposant sous la forme $\lambda I_d + N$, où la matrice N est nilpotente d'indice d . De plus, pour $k \leq d$, on a

$$N^k = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où le "1" de la première ligne est à la colonne $k - 1$. Puisque λI_d et N commutent, on a

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \left(I_d + tN + \frac{1}{2!}t^2N^2 + \dots + \frac{1}{(d-1)!}t^{d-1}N^{d-1} \right)$$

ce qui donne

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{d-1}/(d-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{d-2}/(d-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors les résultats suivants :

- Si $\Re(\lambda) < 0$, alors l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, et $e^{tJ}X$ tend vers 0 quel que soit X quand t tend vers $+\infty$; on a même $\|e^{tJ}\| \leq M$ pour une certaine constante M et donc la solution nulle est asymptotiquement stable.
- Si $\Re(\lambda) > 0$, alors l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, et pour $X = (0, \dots, 0, \eta)$, $e^{tA}X$ tend vers $+\infty$, indépendamment de la valeur de $\eta > 0$. La solution nulle n'est pas stable.
- Si $\Re(\lambda) = 0$, alors on distingue deux cas :
 - Le bloc de Jordan est de taille 1. Dans ce cas, on a $e^{tJ}X = e^{\lambda t}x$ où $X = (x)$. La solution nulle est stable (car $|e^{\lambda t}| = 1$, on choisit $\eta = \varepsilon$), mais n'est pas asymptotiquement stable.
 - Le bloc de Jordan est de taille $d > 1$. Alors, pour $X = (0, \dots, 0, \eta)$, $e^{tJ}X = (\eta e^{\lambda t} t^{d-1}/(d-1)!, \dots)$ tend vers ∞ , quel que soit $\eta > 0$. La solution nulle n'est pas stable.

Pour conclure, il suffit de remarquer que tous les blocs de Jordan associés à la valeur propre λ sont de taille 1×1 si et seulement si λ est de multiplicité 1 comme racine du polynôme minimal de A .

MINI-PROBLÈME

Exercice 12 - Sur les zéros des solutions d'une équation différentielle - *Master Enseignement* - **

Exercices - Equations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives : corrigé

1. La fonction $x \mapsto x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est un tel exemple (vérifier qu'elle est continue et que la suite $(1/2n\pi)_n$ est une suite de zéros distincts qui converge vers zéro) !
2. Soit (a_n) une suite de zéros de f tous distincts, et donc distincts de a , qui converge vers a . Alors le taux d'accroissement

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = 0$$

est nul, et le membre de gauche tend vers $f'(a)$.

3. Puisque f ne s'annule pas dans l'intervalle $[a, b]$, elle y garde un signe constant. On peut supposer par exemple que $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Mais alors, il est facile de voir que nécessairement $f'(a) \geq 0$. En effet, pour $x \in]a, b]$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et il suffit de faire tendre x vers a pour en déduire le résultat annoncé. De même, on a $f'(b) \leq 0$, ce qui est le résultat voulu.

4. Supposons que t_0 soit un zéro non-isolé de f . Alors on a $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Or, d'après la théorie sur les équations différentielles linéaires, on sait qu'il existe une seule solution de (E) vérifiant $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. La fonction nulle est solution de (E) et vérifie ces deux conditions. On en déduit que f est identiquement nulle, une contradiction.
5. C'est le même type de raisonnement. En effet, on écrit qu'il existe une seule solution y de (E) vérifiant $y(t_0) = Cf(t_0)$ et $y'(t_0) = Cf'(t_0)$. Or, g et Cf sont deux solutions de (E) vérifiant cette contrainte. C'est donc que $g = Cf$.
6. Si W s'annule en un point t_0 , par définition du déterminant, c'est que les vecteurs $(f(t_0), f'(t_0))$ et $(g(t_0), g'(t_0))$ sont colinéaires. Par exemple, on peut supposer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(t_0) = Cf(t_0)$ et $g'(t_0) = f'(t_0)$. Mais alors, $g = Cf$ ce qui contredit que (f, g) forme une base de l'ensemble des solutions.
7. Par définition, on sait que, pour tout réel t ,

$$W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

On dérive alors cette équation. Utilisant le fait que f et g sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant f'' et g'' par respectivement $-p(t)f'(t) - q(t)f$ et $-p(t)g'(t) - q(t)g(t)$, on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On intègre alors cette équation différentielle, et on trouve que

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right).$$

8. On a $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$. Puisque W est une fonction continue qui ne s'annule pas, elle garde un signe constant. De plus, on sait que $f'(a)$ et $f'(b)$ ont des signes opposés. Il en est donc de même de $g(a)$ et de $g(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, g , qui est bien une fonction continue, s'annule sur $[a, b]$.